*Construction des solutions des équations différentielles de type sphéroïdal par discrétisation sur l'intervalle [-1,1]*
*Fonctions d'ondes sphéroïdales de Legendre*
*Fonctions d'ondes sphéroïdales de Jacobi*
*Fonctions d'ondes sphéroïdales de Legendre associées généralisées*

*Le but est d'approximer la solution de première espèce d'une équation différentielle de type sphéroïdale par l'utilisation d'une base de fonctions discrètes sur l'intervalle [-1,1]. La particularité du système de coordonnées sphéroïdales allongées et d'introduire le plus souvent lors de la séparation des variables une équation différentielle de la forme :*

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}y(x)\right)+\left(\lambda+V(x)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x)=0$$

*Pour l'équation des ondes sphéroïdales la fonction V(x) est égale à :*

$$V(x)=\gamma^2\left(1-x^2\right)$$

*Lorsque le paramètre m est un entier, on sait que la solution de l'équation des ondes sphéroïdales peut se développer en une série de fonctions de Legendre associées.*

*Construction des fonctions d'interpolation de Lagrange à partir de polynômes orthogonaux*

*Sur la base de cette considération, on sait par ailleurs que sur un intervalle [a,b], s'il existe un système de polynômes orthogonaux par rapport à un produit scalaire de poids w(x), il est possible d'approximer toute fonction continue y(x) sur [a,b] par des fonctions dîtes de Lagrange $f_i(x)$ construites à partir du système de polynômes orthogonaux en utilisant les zéros de ces derniers sur l'intervalle [a,b]. Soit $p_N(x)$ de tels polynômes orthogonaux sur un poids w(x) :* $\int_a^b dx\, w(x)p_N(x)p_{N'}(x)=h_N\delta_{N,N'}$*, alors $h_N$ est considérée comme la norme pondérée du polynôme $p_N(x)$.*

*Ici j'introduis le coefficient $k_N$ qui est le coefficient de degré N du polynôme. Ce dernier coefficient est bien évidemment une constante dépendant de la normalisation utilisée pour l'expression des polynômes orthogonaux de base :* $p_N(x)=k_{N,N}x^N+k_{N-1,N}x^{N-1}+\ldots+k_{0,N}$.

*Une propriété importante est que ces polynômes orthogonaux respectent la relation de récurrence à trois termes suivantes :*

$$\frac{k_{N,N}}{k_{N+1,N+1}}p_{N+1}(x)=\left(x-\frac{k_{N-1,N}}{k_{N,N}}+\frac{k_{N,N+1}}{k_{N+1,N+1}}\right)p_N(x)-\frac{k_{N-1,N-1}h_N}{k_{N,N}h_{N-1}}p_{N-1}(x)$$

*Le jeux de polynômes orthogonaux respectent également la relation de Christophel-Darboux suivante :* $\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{l=N-1}\frac{p_l(x)p_l(y)}{h_l}=\frac{k_{N-1,N-1}}{h_{N-1}k_{N,N}}\frac{p_N(x)p_{N-1}(y)-p_{N-1}(x)p_N(y)}{x-y}$ *avec pour limite lorsque x tend vers y :* $\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{l=N-1}\frac{(p_l(x))^2}{h_l}=\frac{k_{N-1,N-1}}{h_{N-1}k_{N,N}}\times(p'_N(x)p_{N-1}(x)-p'_{N-1}(x)p_N(x))$.

*La relation de Christophel-Darboux appliquée aux zéros des $x_i$ et $x_j$ du polynôme $p_N(x)$ donne :*

$$i \neq j \rightarrow \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{l=N-1}\frac{p_l(x_i)p_l(x_j)}{h_l} = \frac{k_{N-1,N-1}}{h_{N-1}k_{N,N}}\frac{p_N(x_i)p_{N-1}(x_j) - p_{N-1}(x_i)p_N(x_j)}{x-y} = 0$$

$$i = j \rightarrow \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{l=N-1}\frac{(p_l(x_i))^2}{h_l} = \frac{k_{N-1,N-1}}{h_{N-1}k_{N,N}} \times \left(p'_N(x_i)p_{N-1}(x_i) - p'_{N-1}(x_i)p_N(x_i)\right) = \frac{k_{N-1,N-1}}{h_{N-1}k_{N,N}} \times p'_N(x_i)p_{N-1}(x_i)$$

*En introduisant les fonctions* $\varphi_N(x) = h_N^{-\frac{1}{2}}\sqrt{w(x)}p_N(x)$*, la relation de Christophel-Darboux s'écrit :*

$$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{l=N-1}\frac{(p_l(x_i))^2}{h_l} = \frac{k_{N-1,N-1}}{h_{N-1}k_{N,N}} \times p'_N(x_i)p_{N-1}(x_i) \leftarrow p_l(x) = \varphi_l(x)h_l^{\frac{1}{2}}w(x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{l=N-1}\varphi_l(x_i)\varphi_l(x_j) = \lambda_i^{-1}\delta_{i,j} \quad avec \quad \lambda_i = \frac{h_{N-1}k_{N,N}}{k_{N-1,N-1}p'_N(x_i)\,p_{N-1}(x_i)\,w(x_i)}$$

*Les fonctions de Lagrange sont alors construites sur la base des polynômes orthogonaux (et des fonctions* $\varphi_l$ *) par la formule :* $f_i(x) = \lambda_i \times \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{l=N-1}\varphi_l(x_i)\varphi_l(x)$*. La condition pour laquelle l'approximation / interpolation par des fonctions de Lagrange est possible est que le jeu de fonctions de Lagrange satisfait aux deux conditions suivantes :* $\forall i,j \in \{1,..,N\} \quad f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ *et la relation d'orthogonalité :* $\int_a^b dx\, f_i(x)f_j(x) = \lambda_i\delta_{i,j}$.

*Les fonctions de Lagrange liées aux polynômes orthogonaux se construisent par la simple formule suivante :*

$$\begin{cases} x_i \quad tel\ que \quad p_N(x_i) = 0 \qquad p_N\ polynôme\ de\ degré\ N \\ f_i(x) = \sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\frac{1}{p_N'(x_i)}\frac{p_N(x)}{x-x_i} \end{cases}$$

*Si l'on calcule une approximation de la fonction y(x) sur la grille des zéros des polynômes orthogonaux alors la fonction peut s'écrire sous cette forme :*

$$\begin{cases} x_i \quad tel\ que \quad p_N(x_i) = 0 \qquad p_N\ polynôme\ de\ degré\ N \\ y(x) = \sum_{i=1}^{i=N} y(x_i)\,f_i(x) \end{cases}$$

*Et par la relation d'orthogonalité le coefficient peut aussi s'écrire :* $y(x_i) = \frac{1}{\lambda_i}\int_a^b dx\, f_i(x)y(x)$.

*Imaginons que l'on ne travaille pas directement avec les polynômes orthogonaux, mais avec leur produit avec la racine carrée du poids (fonction déjà introduite plus haut) et moyennant une constante donnée, soit :* $\varphi_N(x) = h_N^{-\frac{1}{2}}\sqrt{w(x)}p_N(x)$*, alors il est tout aussi facile d'écrire :* $f_i(x) = \frac{1}{\varphi_N'(x_i)}\frac{\varphi_N(x)}{x-x_i}$ *car* $\varphi_N'(x) = h_N^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{w(x)}p_N'(x) + \frac{w'(x)p_N(x)}{2\sqrt{w(x)}}\right) \Rightarrow \varphi_N'(x_i) = h_N^{-\frac{1}{2}}\sqrt{w(x_i)}p_N'(x_i)$.

*La formule* $f_i(x)=\frac{1}{\varphi_N'(x_i)}\frac{\varphi_N(x)}{x-x_i}$ *s'obtient également en appliquant la relation de Christophel-Darboux à l'expression originale de la construction des fonctions de Lagrange* $f_i(x)=\lambda_i\times\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{l=N-1}\varphi_l(x_i)\varphi_l(x)$*, à savoir :*

$$f_i(x)=\lambda_i\times\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{l=N}\varphi_l(x_i)\varphi_l(x)\qquad avec\qquad \lambda_i=\frac{h_{N-1}k_{N,N}}{k_{N-1,N-1}p'_N(x_i)p_{N-1}(x_i)w(x_i)}\Rightarrow p_{N-1}(x_i)=\frac{h_{N-1}k_{N,N}}{k_{N-1,N-1}p'_N(x_i)\lambda_i w(x_i)}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{l=N-1}\frac{p_l(x_i)p_l(x)}{h_l}=\frac{k_{N-1,N-1}}{h_{N-1}k_{N,N}}\frac{p_{N-1}(x_i)p_N(x)}{x-x_i}\leftarrow p_l(x)=\frac{h_l^{\frac{1}{2}}\varphi_l(x)}{\sqrt{w(x)}}\quad p_N(x)=\frac{h_N^{\frac{1}{2}}\varphi_N(x)}{\sqrt{w(x)}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{l=N-1}\frac{\varphi_l(x_i)\varphi_l(x)}{\sqrt{w(x_i)}\sqrt{w(x)}}=\frac{1}{\lambda_i}\times\frac{1}{p'_N(x_i)w(x_i)}\times\frac{1}{x-x_i}\frac{h_N^{\frac{1}{2}}\varphi_N(x)}{\sqrt{w(x)}}\Rightarrow\lambda_i\times\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{l=N-1}\varphi_l(x_i)\varphi_l(x)=\frac{1}{p'_N(x_i)\sqrt{w(x_i)}}\times\frac{h_N^{\frac{1}{2}}\varphi_N(x)}{x-x_i}$$

$$Or\quad\varphi_N'(x_i)=h_N^{-\frac{1}{2}}\sqrt{w(x_i)}p_N'(x_i)\Rightarrow f_i(x)=\frac{\sqrt{w(x_i)}}{\sqrt{w(x_i)}\times h_N^{\frac{1}{2}}\varphi_N'(x_i)}\times\frac{h_N^{\frac{1}{2}}\varphi_N(x)}{x-x_i}=\frac{1}{\varphi_N'(x_i)}\times\frac{\varphi_N(x)}{x-x_i}$$

*On peut calculer plus précisément les poids de Gauss* $\lambda_i$ *lorsque les polynômes orthogonaux sont définis à l'aide d'une équation différentielle sur le poids w(x). Lorsque ce poids est défini par une équation différentielle du premier degré :* $\frac{d}{dx}(\sigma(x)w(x))=\tau(x)w(x)$ *où τ(x) est un polynôme du premier degré et σ(x) est de la forme :*

$$\sigma(x)=\begin{cases}(x-a)(b-x) & pour\quad a,b\ finis\\ x-a & pour\quad a\ fini\quad et\quad b=\infty\\ b-x & pour\quad a=-\infty\quad et\quad b\ fini\\ 1 & pour\quad a=-\infty\quad et\quad b=\infty\end{cases}$$

*alors les polynômes orthogonaux vérifient l'équation différentielle :*

$$\sigma(x)\,p_N''(x)+\tau(x)\,p_N'(x)+N\,d_N\,p_N(x)=0$$
$$Avec\quad d_N=-\tau'(x)-\frac{1}{2}(N-1)\sigma''(x)$$

*Et les polynômes orthogonaux peuvent être générés par une formule générale de Rodrigues :*

$$p_N(x)=\frac{(-1)^N k_{N,N}}{\prod_{l=0}^{l=N-1}d_{N+k}}\times\frac{1}{w(x)}\times\frac{d^N}{dx^N}(\sigma(x)w(x))$$

*La dérivée première du polynôme* $p_N(x)$ *s'exprime alors sous la forme :*

$$\sigma(x)p_N'(x)=\left(N\,\sigma'(0)+\frac{1}{2}\left(N\,x-\frac{k_{N-1,N}}{k_{N,N}}\right)\sigma''(x)\right)p_N(x)+\frac{k_{N-1,N-1}}{k_{N,N}}\frac{h_N}{h_{N-1}}\,d_{2N}\;p_{N-1}(x)$$

*Avec cette dernière formule sur la dérivée première, le poids de Gauss $\lambda_i$ devient :*

$$\sigma(x_i)p_N'(x_i)=\frac{k_{N-1,N-1}}{k_{N,N}}\frac{h_N}{h_{N-1}}d_{2N}\ p_{N-1}(x_i)\Rightarrow p_N'(x_i)=\frac{k_{N-1,N-1}}{k_{N,N}}\frac{h_N}{h_{N-1}}\frac{d_{2N}\ p_{N-1}(x_i)}{\sigma(x_i)}$$

$$\lambda_i=\frac{h_{N-1}k_{N,N}}{k_{N-1,N-1}p'_N(x_i)p_{N-1}(x_i)w(x_i)}=\left(\frac{h_{N-1}k_{N,N}}{k_{N-1,N-1}}\right)^2\times\frac{\sigma(x_i)}{h_N d_{2N}w(x_i)(p_{N-1}(x_i))^2}$$

*<u>Autre expression générale des fonctions de Lagrange</u>*

*Si par exemple le système de fonctions $\varphi_N(x)$ est choisi orthonormal alors la constante n'est ni plus ni moins que la norme du polynôme $p_N(x)$ à savoir :* $\int_a^b dx(\varphi_N(x))^2=1\Rightarrow h_N=\int_a^b dx\ w(x)(p_N(x))^2$ *.*

*Comme tout polynôme est le produit de binômes de degré 1 sur ces racines on peut immédiatement écrire la fonction de Lagrange sous la forme :*

$$p_N(x)=k_N\prod_{i=1}^{i=N}x-x_i\Rightarrow p_N'(x)=k_N\sum_{l=1}^{l=N}\prod_{i=1,i\neq l}^{i=N}x-x_i$$

$$\Rightarrow p_N'(x_i)=k_N\sum_{l=1}^{l=N}\prod_{i=1,i\neq l}^{i=N}x-x_i=k_N\prod_{l=1,l\neq i}^{l=N}x_i-x_l\Rightarrow f_i(x)=\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\times\frac{\prod_{l=1,l\neq i}^{l=N}x-x_l}{\prod_{l=1,l\neq i}^{l=N}x_i-x_l}$$

*Cela permet bien de s'assurer que :* $\forall i,j\in\{1,..,N\}\quad f_i(x_j)=\delta_{i,j}$*. Par ailleurs ces fonctions de Lagrange sont orthogonales car pour toute expression de la forme :* $g(x)=w(x)\times Pol_{2N-1}(x)$ *avec w(x) le poids des polynômes orthogonaux de base et un polynôme de degré au plus 2N-1 respecte exactement la quadrature de Gauss sur la grille des zéros $x_i$, (règle de Szëgo) , à savoir :*

$\int_a^b dx\ g(x)=\sum_{i=1}^{i=N}\lambda_i g(x_i)$ *où les coefficients $\lambda_i$ sont les poids de Gauss. Comme chaque fonction de Lagrange est le produit de la racine carrée du poids w(x) et d'un polynôme de degré N-1, alors l'expression* $f_i(x)f_j(x)=w(x)\times Pol_{2N-2}(x)$*.*

*Il s'ensuit que :* $\int_a^b dx\ f_i(x)f_j(x)=\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l f_i(x_l)f_j(x_l)=\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l\delta_{i,l}\delta_{j,l}=\lambda_i\delta_{i,j}$*. Ce qui est une façon bien commode de définir explicitement les poids de Gauss pour toute quadrature utilisant les fonctions de Lagrange, à savoir :* $\lambda_i=\int_a^b dx\ (f_i(x))^2$ *. Pour tout autre fonction la quadrature de Gauss n'est pas respectée mais plus la grille des zéros est fine (N grand) plus l'intégrale peut être approximée par sa quadrature de Gauss à savoir :* $\int_a^b dx\ g(x)\approx\sum_{i=1}^{i=N}\lambda_i g(x_i)$*. Autrement dit on s'intéresse essentiellement à la détermination exacte ou approchée d'expressions intégrales de la forme :* $\int_a^b dx\ f_i(x)g(x)f_j(x)$

*Expression générale de l'équation différentielle des fonctions de Lagrange construites à partir des polynômes orthogonaux classiques*

*L'expression générale de la fonction de Lagrange non normés :* $f_i(x)=\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\frac{1}{p_N'(x_i)}\frac{p_N(x)}{x-x_i}$

*permet de déduire l'équation différentielle de cette dernière sachant que l'équation des polynômes classique orthogonaux est de la forme :*

$$\begin{cases}\sigma(x)p_N''(x)+\tau(x)p_N'(x)+Nd_N p_N(x)=0\\ \sigma'(x)\,w(x)+\sigma(x)\,w'(x)=\tau(x)\,w(x)\end{cases}$$
$$\Rightarrow \sigma''(x)\,w(x)+2\sigma'(x)\,w'(x)+\sigma(x)\,w''(x)=\tau'(x)\,w(x)+\tau(x)\,w'(x)$$
$$Avec\quad d_N=-\tau'(x)-\frac{1}{2}(N-1)\,\sigma''(x)$$

*Prenons tout d'abord la fonction g(x) définit comme suit :* $g_N(x)=\sqrt{w(x)}\times p_N(x)$*, son équation différentielle est la suivante :*

$$\sigma(x)\,g_N''(x)+\sigma'(x)\,g_N'(x)+\frac{3\,\sigma(x)\left(w'(x)\right)^2-4w(x)\left(w'(x)\sigma'(x)+\sigma(x)w''(x)\right)+\left(w(x)\right)^2\left(2d_N(2N-1)-(N+1)\,\sigma''(x)\right)}{4\left(w(x)\right)^2}\,g_N(x)=0$$

*L'équation de la fonction de Lagrange quant à elle est déduite de la construction formelle (hormis les constantes) à savoir :* $f_i(x)\propto\frac{\sqrt{w(x)}\;p_N(x)}{x-x_i}\propto\frac{g_N(x)}{x-x_i}$*. De l'équation précédente, elle contient un terme supplémentaire en 1/(x-x<sub>i</sub>) :*

$$\sigma(x)f_i''(x)+\sigma'(x)\,f_i'(x)+\frac{3\,\sigma(x)\left(w'(x)\right)^2-4w(x)\left(w'(x)\sigma'(x)+\sigma(x)w''(x)\right)+\left(w(x)\right)^2\left(2d_N(2N-1)-(N+1)\,\sigma''(x)\right)}{4\left(w(x)\right)^2}\,f_i(x)+$$
$$+\frac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i}=0$$

*Ce qui peut s'écrire aussi plus simplement :*

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)f_i'(x)\right)+\left(\frac{2d_N(2N-1)-(N+1)\,\sigma''(x)}{4}+\frac{\sigma(x)}{4}\left(3\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2-4\frac{w''(x)}{w(x)}\right)-\frac{w'(x)}{w(x)}\sigma'(x)\right)f_i(x)+\frac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i}=0$$
$$De\ plus\quad 2\frac{w'(x)}{w(x)}\sigma'(x)=\frac{w'(x)}{w(x)}\tau(x)+\tau'(x)-\sigma''(x)-\frac{w''(x)}{w(x)}\sigma(x)$$
$$\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)f_i'(x)\right)+\left(N\,d_N+\frac{\sigma(x)}{4}\left(3\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2-2\frac{w''(x)}{w(x)}\right)-\frac{\tau(x)}{2}\frac{w'(x)}{w(x)}\right)f_i(x)+\frac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i}=0$$

*Et encore plus simplement :*

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)f_i'(x)\right)+\left(N\,d_N+\frac{\sigma(x)}{4}\left(3\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2-2\frac{w''(x)}{w(x)}\right)-\frac{\tau(x)}{2}\frac{w'(x)}{w(x)}\right)f_i(x)+\frac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i}=0$$
$$De\ plus\quad \frac{w''(x)}{w(x)}\sigma(x)=\frac{w'(x)}{w(x)}\tau(x)+\tau'(x)-\sigma''(x)-2\frac{w'(x)}{w(x)}\sigma'(x)\quad et\quad \sigma'(x)-\tau(x)=-\sigma(x)\frac{w'(x)}{w(x)}$$
$$\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)f_i'(x)\right)+\left(N\,d_N-\frac{\tau'(x)-\sigma''(x)}{2}-\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2\right)f_i(x)+\frac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i}=0$$

*L'expression* $-\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2$ *contient des pôles en général aux bornes a et b de l'intervalle. Supposons que ce terme s'écrive sous la forme :* $-\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2 = \lambda + \frac{\mu}{x-a} + \frac{\nu}{x-b} = \lambda + s(x)$ *lorsque a et b sont finis, ou bien encore* $-\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2 = \lambda + \mu\, x + \nu\, x^2 = \lambda + s(x)$ *lorsque a et b sont tous deux infinis, ou bien encore* $-\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2 = \lambda + \mu\, x + \frac{\nu}{x-a} = \lambda + s(x)$ *lorsque a est fini et b infini, sachant que λ est une constante.*

*Lorsque a et b sont finis, il suffit de calculer les limites et de déterminer ensuite la constante λ :*

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \lim_{x\to a^+} -(x-a)\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2 \\ \nu &= \lim_{x\to b^-} -(x-b)\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = -\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2 - \frac{\mu}{x-a} - \frac{\nu}{x-b}$$

*Lorsque l'une des limites de l'intervalle [a,b] est infinie, par exemple b, on calcule la limite suivante pour obtenir le terme singulier à l'infini :* $\mu = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2$

*On peut donc chercher à isoler les termes de singularité dans la fonctions s(x) et écrire l'équation comme suit :*

$$\frac{d}{dx}(\sigma(x)f_i'(x)) + \left(N\, d_N - \frac{\tau'(x)-\sigma''(x)}{2} + \lambda + s(x)\right) f_i(x) + \frac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i} = 0$$

*Ce faisant il est alors possible de définir l'opérateur cinétique différentielle par l'expression :*

$$T\{f\}(x) = \left(-\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\frac{d}{dx}\right) - s(x)\right)(f(x))$$

*Et l'équation différentielle des fonctions de Lagrange est de la forme :*

$$T\{f_i\}(x) = \left(-\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\frac{d}{dx}\right) - s(x)\right)(f_i(x)) = \left(N\, d_N - \frac{\tau'(x)-\sigma''(x)}{2} + \lambda\right) f_i(x) + \frac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i}$$

*A titre d'exemples passons en revue les divers polynômes orthogonaux classiques qui ne sont pas directement repris dans ce document. Plus loin j'évoquerais les polynômes associées de Legendre et les polynômes de Jacobi.*

***Les polynômes d'Hermite*** *sont associés au poids w et aux fonctions σ,τ suivantes :*

$$w(x)=e^{-x^2} \Rightarrow \frac{w'(x)}{w(x)}=-2x \quad \sigma(x)=1 \quad \tau(x)=-2x \quad a=-\infty \quad b=+\infty \quad d_N=2$$

*L'expression* $-\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2=-x^2$ *isole de facto la singularité sans qu'il soit besoin de déterminer une limite. Ainsi λ=0 et l'équation des fonctions de Lagrange-Hermite est :*

$$f_i''(x)+\left(2N+1-x^2\right)f_i(x)+\frac{2f_i'(x)}{x-x_i}=0$$

***Les polynômes de Laguerre*** *sont associés au poids w et aux fonctions σ,τ suivantes :*

$$w(x)=x^\alpha e^{-x} \Rightarrow \frac{w'(x)}{w(x)}=\frac{\alpha}{x}-1 \quad \sigma(x)=x \quad \tau(x)=\alpha+1-x \quad a=0 \quad b=+\infty \quad d_N=1$$

*L'expression* $-\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2=-\frac{x}{4}\left(\frac{\alpha}{x}-1\right)^2=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{4x}-\frac{x}{4}$ *permet d'isoler facilement les singularités en 0 et l'infini sans qu'il soit besoin de déterminer une limite. Ainsi λ=α/2 et* $s(x)=-\frac{\alpha^2}{4x}-\frac{x}{4}$

*L'équation des fonctions de Lagrange-Laguerre devient donc :*

$$\frac{d}{dx}\left(x\,f_i'(x)\right)+\left(N+\frac{1+\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{4x}-\frac{x}{4}\right)f_i(x)+\frac{2x\,f_i'(x)+f_i(x)}{x-x_i}=0$$

$$\Leftrightarrow x\,f_i''(x)+f_i'(x)+\frac{1}{4}\left(2(2N+1+\alpha)-x-\frac{\alpha^2}{x}\right)f_i(x)+\frac{2x\,f_i'(x)+f_i(x)}{x-x_i}=0$$

***Les polynômes de Jacobi*** *sont associés au poids w et aux fonctions σ,τ suivantes :*

$$w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\quad \sigma(x)=1-x^2\quad \tau(x)=\beta-\alpha-x(\alpha+\beta+2)\quad a=-1\quad b=+1\quad d_N=N+\alpha+\beta+1$$

*L'expression* $-\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2$ *n'est pas aussi facile à manipuler en revanche on peut calculer plus ou moins « facilement » (avec Mathematica) les limites suivantes :*

$$\mu=\lim_{x\to a^+}\ -(1-x)\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2=-\frac{\alpha^2}{2}$$
$$\nu=\lim_{x\to b^-}\ -(1+x)\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2=-\frac{\beta^2}{2}$$

*De plus (encore grâce à Mathematica) la constante λ se calcule ainsi :*

$$\lambda=-\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{1-x}+\frac{\beta^2}{1+x}\right)=\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}$$

*Ainsi l'équation différentielle des fonctions de Lagrange-Jacobi s'écrit :*

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)f_i'(x)\right)+\left(N(N+\alpha+\beta+1)+\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{1-x}+\frac{\beta^2}{1+x}\right)\right)f_i(x)+\frac{2(1-x^2)f_i'(x)-2\,x\,f_i(x)}{x-x_i}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left((1-x^2)f_i'(x)\right)+\left(\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{1-x}+\frac{\beta^2}{1+x}\right)\right)f_i(x)+\frac{2(1-x^2)f_i'(x)-2\,x\,f_i(x)}{x-x_i}=0$$

*<u>Propriété du dernier terme de l'équation différentielle des fonctions de Lagrange</u>*

*Pour ce qui est du dernier terme de l'équation différentielle :* $\frac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i}$*, notons que cette expression ne comporte pas de pôle car sa limite en x=x$_i$ est finie :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_i} & 2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to x_i} & \dfrac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i}=2\sigma(x_i)f_i''(x_i)+3\,\sigma'(x_i)f_i'(x_i)+\sigma''(x)f_i(x_i) \end{cases}$$

*De plus*

$$f_i(x)=\sqrt{w(x)}g_i(x) \quad avec \quad g_i(x) \quad polynôme\ de\ degré\ N-1$$
$$\Rightarrow f_i'(x)=\frac{w'(x)}{w(x)}f_i(x)+\sqrt{w(x)}\,g_i'(x) \quad avec \quad g_i'(x) \quad polynôme\ de\ degré\ N-2$$

$$2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)=2\sigma(x)\frac{w'(x)}{w(x)}f_i(x)+2\sqrt{w(x)}\,\sigma(x)g_i'(x)+\sigma'(x)\sqrt{w(x)}g_i(x)$$

*Alors*

$$Comme \quad \sigma(x)\frac{w'(x)}{w(x)}=\tau(x)-\sigma'(x)\rightarrow Polynôme\ de\ degré\ 1$$
$$\Rightarrow 2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)=2(\tau(x)-\sigma'(x))\sqrt{w(x)}g_i(x)+2\sqrt{w(x)}\,\sigma(x)g_i'(x)+\sigma'(x)\sqrt{w(x)}g_i(x)$$
$$\Rightarrow 2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)=\sqrt{w(x)}\times Polynôme\ de\ degré\ N$$

*Comme l'expression* $2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)$ *s'annule en x=x$_i$ le polynôme x-x$_i$ peut être factorisé et il en résulte que pour les fonctions de Lagrange construites à partir des polynômes orthogonaux classiques l'expression* $\frac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i}$ *est de la forme :*

$$\frac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i}=\sqrt{w(x)}\times Polynôme\ de\ degré\ N-1$$

*Grâce à l'équation différentielle des fonctions de Lagrange, la règle de Szëgo concernant la quadrature de Gauss pour des intégrales mettant en jeux le poids w(x) et des polynômes de degré inférieur ou égal à 2N-1 s'applique. Cela a pour conséquence que la quadrature de Gauss s'applique exactement pour l'expression contenant l'opérateur différentiel :*

$$D\{f\}(x)=\left(\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\frac{d}{dx}\right)+\left(N\,d_N-\frac{\tau'(x)-\sigma''(x)}{2}-\frac{\sigma(x)}{4}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2\right)\right)(f(x))$$

*Sous la forme :* $\int_a^b dx\,(f_i(x)D\{f_j\}(x))=\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l f_i(x_l)D\{f_j\}(x_l)=\sqrt{\lambda_i}D\{f_j\}(x_i)$*. Il suffit donc de calculer la valeur de cet opérateur différentiel aux zéros du polynôme orthogonal de degré N. Cet opérateur différentiel contient entre autre l'opérateur cinétique défini auparavant.*

*Normalisation des fonctions de Lagrange*

*Il est d'usage d'utiliser plutôt des fonctions de Lagrange orthonormées par rapport à la norme L2 sur l'intervalle [a,b]. Il vient donc la définition suivante des fonctions de Lagrange :* $\hat{f}_i(x)=\frac{f_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}}$

*Ce qui conduit aux relations suivantes :* $\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)=\delta_{i,j}$.

*Toutes les expressions qui suivent sont donc établis sur les fonctions de Lagrange orthonormées.*

*Calcul exact des dérivées premières et secondes*

*Les dérivées premières et secondes des fonctions de Lagrange orthonormées se définissent facilement en introduisant les fonctions produits suivantes :*

$$prod(x)=\prod_{l=1}^{l=N}x-x_l \qquad prod_i(x)=\prod_{l=1,l\neq i}^{l=N}x-x_l \qquad prod_{i,j}(x)=\prod_{l=1,l\neq i,l\neq j}^{l=N}x-x_l \qquad prod_{i,j,k}(x)=\prod_{l=1,l\neq i,l\neq j,l\neq k}^{l=N}x-x_l$$

$$\Rightarrow prod_i(x)=\frac{prod(x)}{x-x_i} \qquad prod_{i,j}(x)=\frac{prod(x)}{(x-x_i)(x-x_j)}=\frac{prod_i(x)}{x-x_j} \qquad prod_{i,j,k}(x)=\frac{prod(x)}{(x-x_i)(x-x_j)(x-x_k)}=\frac{prod_{i,j}(x)}{x-x_k}$$

$$prod_i'(x)=\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}prod_{l,i}(x) \qquad prod_{i,j}'(x)=\sum_{l=1,l\neq i,l\neq j}^{l=N}prod_{l,i,j}(x) \qquad prod_i''(x)=\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}prod_{l,i}'(x)$$

$$Et \qquad ((x-x_i)prod_i(x))'=\sum_{l=1}^{l=N}prod_l(x) \qquad ((x-x_i)prod_i(x))''=\sum_{l=1}^{l=N}prod_l'(x)$$

$$De\ plus \quad \begin{cases} prod_i(x_j)=\delta_{i,j}prod_i(x_i) & prod_{i,j}(x_k)=\delta_{i,k}prod_{i,j}(x_i)+\delta_{j,k}prod_{i,j}(x_j) \\ prod_{i,j,k}(x_l)=\delta_{i,l}prod_{i,j,k}(x_i)+\delta_{j,l}prod_{i,j,k}(x_j)+\delta_{k,l}prod_{i,j,k}(x_k) \end{cases}$$

$$i\neq j\rightarrow\begin{cases}(x_j-x_i)prod_i'(x_j)=prod_j(x_j)\\ \Leftrightarrow prod_i'(x_j)=prod_{j,i}(x_j)\end{cases} \qquad i=j\rightarrow prod_i'(x_i)=\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}prod_{l,i}(x_i)=prod_i(x_i)\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{x_i-x_l}$$

$$i\neq j\rightarrow\begin{cases}(x_j-x_i)prod_i''(x_j)+2prod_i'(x_j)=\sum_{l=1}^{l=N}prod_l'(x_j)\Rightarrow(x_j-x_i)prod_i''(x_j)=-2prod_i'(x_j)+\sum_{l=1}^{l=N}prod_l'(x_j)\\ \Rightarrow(x_j-x_i)prod_i''(x_j)=-2prod_{j,i}(x_j)+2\sum_{l=1,l\neq j}^{l=N}prod_{j,l}(x_j)=2\sum_{l=1,l\neq i,l\neq j}^{l=N}prod_{j,l}(x_j)\Rightarrow prod_i''(x_j)=2\sum_{l=1,l\neq i,l\neq j}^{l=N}prod_{l,i,j}(x_j)\\ \Rightarrow prod_i''(x_j)=2prod_{i,j}'(x_j)\end{cases}$$

$$i=j\rightarrow prod_i''(x_i)=\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}prod_{l,i}'(x_i)=\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\sum_{k=1,k\neq l,k\neq i}^{k=N}prod_{k,l,i}(x_i)=prod_i(x_i)\sum_{l,k=1,k\neq l,k\neq i,l\neq i}^{l,k=N}\frac{1}{(x_i-x_k)(x_i-x_l)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{f}_i(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\times\frac{prod_i(x)}{prod_i(x_i)} \qquad f_i'(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\times\frac{prod_i'(x)}{prod_i(x_i)}+\frac{1}{2}\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_i(x)\\ \hat{f}_i''(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\times\frac{prod_i''(x)}{prod_i(x_i)}+\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_i'(x)+\frac{1}{4}\left(2\frac{w''(x)}{w(x)}-3\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2\right)\hat{f}_i(x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{f}_i(x_j)=\frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{\lambda_i}} \quad i\neq j\rightarrow\hat{f}_i'(x_j)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x_j)}{w(x_i)}}\frac{prod_i'(x_j)}{prod_i(x_i)}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x_j)}{w(x_i)}}\frac{prod_{j,i}(x_j)}{prod_i(x_i)} \qquad i=j\rightarrow\hat{f}_i'(x_i)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{x_i-x_l}+\frac{1}{2}\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\right)\\ i\neq j\rightarrow\hat{f}_i''(x_j)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x_j)}{w(x_i)}}\times\frac{prod_i''(x_j)}{prod_i(x_i)}+\frac{w'(x_j)}{w(x_j)}\hat{f}_i'(x_j)\\ i=j\rightarrow\hat{f}_i''(x_i)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{prod_i''(x_i)}{prod_i(x_i)}+\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\hat{f}_i'(x_i)+\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}\left(2\frac{w''(x_i)}{w(x_i)}-3\left(\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\right)^2\right)\end{cases}$$

*Lien avec les équations différentielles*

*Supposons une équation différentielle du second degré de la forme :*

$$p_0(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy(x)}{dx}+(p_2(x)-\omega)\,y(x)=0$$

*Et recherchons la solution approchée à l'aide d'une quadrature impliquant les fonctions de Lagrange :* $y(x)=\sum_{j=1}^{j=N}c_j\ \hat{f}_j(x)$. *Il vient :* $\sum_{j=1}^{j=N}\left(p_0(x)\,c_j\,\frac{d^2\hat{f}_j(x)}{dx^2}+p_1(x)\ c_j\,\frac{d\hat{f}_j(x)}{dx}+(p_2(x)-\omega)\,c_j\ \hat{f}_j(x)\right)=0$

*En multipliant par les N fonctions de Lagrange et par intégration sur [a,b] on obtient un système matriciel de N équations linéaires :*

$$\sum_{j=1}^{j=N}\left(\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)p_0(x)\frac{d^2\hat{f}_j(x)}{dx^2}+\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)p_1(x)\frac{d\hat{f}_j(x)}{dx}+\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)(p_2(x)-\omega)\,c_j\hat{f}_j(x)\right)c_j=0\Leftrightarrow\left(\left[\mathbf{P}^0_{i,j}\right]+\left[\mathbf{P}^1_{i,j}\right]+\left[\mathbf{P}^2_{i,j}\right]-\omega\,[\mathbf{I}]\right)\left[C_j\right]=0$$

*Pour lequel la détermination du paramètre ω s'apparente à la recherche des valeurs propres d'un système matriciel pour lequel les éléments de la matrice sont déterminés par :*

$$\left[\mathbf{P}^0_{i,j}\right]=\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)p_0(x)\frac{d^2\hat{f}_j(x)}{dx^2}$$

$$\left[\mathbf{P}^1_{i,j}\right]=\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)p_1(x)\frac{d\hat{f}_j(x)}{dx}$$

$$\left[\mathbf{P}^2_{i,j}\right]=\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)p_2(x)\hat{f}_j(x)$$

*Il importe donc de pouvoir calculer le plus exactement possible ces expressions intégrales mettant en jeu des opérateurs différentiels ou des opérateurs potentiels.*

*Expressions exactes d'éléments matriciels d'opérateurs différentiels ou potentiels*

*Pour les fonctions de Lagrange construites à partir de ces polynômes orthogonaux il est possible de calculer exactement certaines matrices d'opérateurs différentiels sur la grille (zéros des polynômes orthogonaux). On appellera l'opérateur potentiel une expression non différentielle de la forme :*

$$\left[\mathbf{V}_{i,j}\right]=\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)V(x)\hat{f}_j(x)\quad où\quad V(x)\quad désigne\,une\ fonction\ potentielle\ quelconque$$

*Les éléments matriciels de l'opérateur identité sont triviaux et nous les avons déjà calculés :*

$$\left[\mathbf{I}_{i,j}\right]=\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)=\delta_{i,j}$$

*Les éléments matriciels de l'opérateur potentiel x se calculent assez facilement* $\left[\mathbf{X}_{i,j}\right]=\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\,x\,\hat{f}_j(x)=x_i\delta_{i,j}$ *car l'expression* $\hat{f}_i(x)\,x\,\hat{f}_j(x)=w(x)Pol_{2N-1}(x)$ *respecte la quadrature de Gauss. Les éléments matriciels de l'opérateur potentiel x² se calculent également comme suit :*

$$\hat{f}_i(x)=\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\frac{p_N(x)}{\sqrt{\lambda_i}\,p'_N(x_i)(x-x_i)}=\sqrt{w(x)}\,g_i(x)$$

$$\left[\mathbf{X}^2_{i,j}\right]=\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\,x^2\,\hat{f}_j(x)=\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)(x-x_i)(x-x_j)\hat{f}_j(x)+(x_i+x_j)\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\,x\,\hat{f}_j(x)-x_ix_j\delta_{i,j}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{w(x_i)\,w(x_j)}\times p'_N(x_i)p'_N(x_j)\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\times\int_a^b dx\ w(x)(p_N(x))^2+x_i^2\delta_{i,j}=x_i^2\delta_{i,j}+\frac{h_N}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\sqrt{w(x_i)\,w(x_j)}p'_N(x_i)p'_N(x_j)}$$

$$\lambda_i w(x_i)=\frac{h_{N-1}k_{N,N}}{k_{N-1,N-1}p'_N(x_i)p_{N-1}(x_i)}\qquad\lambda_j w(x_j)=\frac{h_{N-1}k_{N,N}}{k_{N-1,N-1}p'_N(x_j)p_{N-1}(x_j)}$$

*Sachant que* $\frac{\sqrt{p'_N(x_i)p'_N(x_j)p_{N-1}(x_i)p_{N-1}(x_j)}}{p'_N(x_i)p'_N(x_j)}=(-1)^{i-j}\sqrt{\frac{p_{N-1}(x_i)p_{N-1}(x_j)}{p'_N(x_i)p'_N(x_j)}}\Rightarrow\left[\mathbf{X}^2_{i,j}\right]=x_i^2\delta_{i,j}+(-1)^{i-j}\times\sqrt{\frac{p_{N-1}(x_i)p_{N-1}(x_j)}{p'_N(x_i)p'_N(x_j)}}\times\frac{h_Nk_{N-1,N-1}}{h_{N-1}k_{N,N}}$

*On peut encore simplifier cette dernière expression sachant que :*

$$\sigma(x_i)p_N'(x_i)=\frac{k_{N-1,N-1}}{k_{N,N}}\frac{h_N}{h_{N-1}}d_{2N}\ p_{N-1}(x_i)\Rightarrow\frac{p_{N-1}(x_i)}{p_N'(x_i)}=\frac{\sigma(x_i)k_{N,N}h_{N-1}}{k_{N-1,N-1}h_Nd_{2N}}$$

*Il vient :* $\left[\mathbf{X}^2_{i,j}\right]=x_i^2\delta_{i,j}+(-1)^{i-j}\frac{\sqrt{\sigma(x_i)\sigma(x_j)}}{d_{2N}}$

*Les éléments matriciels de l'opérateur différentiel de dérivée première d/dx se calculent ainsi :*

$$\hat{f}_i(x)=\sqrt{w(x)}\,g_i(x)\Rightarrow\hat{f}_i'(x)=\frac{w'(x)}{2w(x)}\hat{f}_i(x)+\sqrt{w(x)}\,g_i'(x)$$

$$\hat{f}_j'(x)=\frac{w'(x)}{2w(x)}\hat{f}_j(x)+\sqrt{w(x)}\,g_j'(x)\Rightarrow\hat{f}_j'(x_i)=\sqrt{w(x_i)}\,g_j'(x_i)$$

$$\left[\mathbf{D}^1_{i,j}\right]=\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\,\hat{f}_j'(x)=\frac{1}{2}\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)+\int_a^b dx\ w(x)\,g_i(x)g_j'(x)$$

$$\int_a^b dx\ w(x)g_i(x)g_j'(x)=\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l w(x_l)g_i(x_l)g_j'(x_l)=\lambda_i\sqrt{w(x_i)}g_i(x_i)\sqrt{w(x_i)}g_j'(x_i)=\lambda_i\hat{f}_i(x_i)\hat{f}_j'(x_i)=\sqrt{\lambda_i}\hat{f}_j'(x_i)$$

$$\Rightarrow\left[\mathbf{D}^1_{i,j}\right]=\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\,\hat{f}_j'(x)=\frac{1}{2}\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)+\sqrt{\lambda_i}\hat{f}_j'(x_i)\quad i\neq j$$

$$\textit{Lorsque}\quad i=j\Rightarrow\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\,\hat{f}_i'(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\hat{f}_i(b)\right)^2-\left(\hat{f}_i(a)\right)^2\right]$$

$$\textit{Comme}\quad\hat{f}_i(x)=\sqrt{w(x)}\,g_i(x)\quad\textit{et}\quad w(a)=w(b)=0\Rightarrow\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\,\hat{f}_i'(x)=0$$

*Dans la formule précédente figure également les éléments matriciels de l'opérateur potentiel W' de l'expression w'(x)/w(x). Ces derniers se calculent assez facilement :*

$$\left[\mathbf{W}'_{i,j}\right]=\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x) \qquad \hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)=w(x)g_i(x)g_j(x) \quad avec \quad g_i(x)\,g_j(x)=Pol_{2N-2}(x)$$

$$\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'-\hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)=Pol_{2N-3}(x)\Rightarrow\int_a^b dx\left(\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'-\hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)\right)=\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l\left(\left(\hat{f}_i(x_l)\hat{f}_j(x_l)\right)'-\hat{f}_i(x_l)\frac{w'(x_l)}{w(x_l)}\hat{f}_j(x_l)\right)$$

$$\Rightarrow\int_a^b dx\left(\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'-\hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)\right)=-\frac{\lambda_i w'(x_i)}{\lambda_i w(x_i)}\delta_{i,j}+\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l\left(\hat{f}_i'(x_l)\hat{f}_j(x_l)+\hat{f}_i(x_l)\hat{f}_j'(x_l)\right)$$

$$=-\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\delta_{i,j}+\sqrt{\lambda_j}\hat{f}_i'(x_j)+\sqrt{\lambda_i}\hat{f}_j'(x_i)$$

$$De\ plus\quad\int_a^b dx\left(\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'-\hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)\right)=\left[\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_a^b-\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)$$

$$\Rightarrow\int_a^b dx\ \hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)=\left[\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_a^b+\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\delta_{i,j}-\sqrt{\lambda_j}f_i'(x_j)-\sqrt{\lambda_i}f_j'(x_i)$$

*Or la plupart du temps* $w(a)=w(b)=0\Rightarrow\hat{f}_i(a)=\hat{f}_j(a)=\hat{f}_i(b)=\hat{f}_j(b)=0$ *d'où dans ce cas* $\left[\mathbf{W}'_{i,j}\right]=\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\delta_{i,j}-\sqrt{\lambda_j}f_i'(x_j)-\sqrt{\lambda_i}f_j'(x_i)$*. Mais ce n'est pas toujours le cas. Par exemple prenons les polynômes de Jacobi (ici α et β sont tous deux entiers positifs ou nuls), alors :*

$$w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\Rightarrow\begin{cases}Si\quad\alpha=0\Rightarrow w(x)=(1+x)^\beta\rightarrow w(1)=2^\beta\\ Si\quad\beta=0\Rightarrow w(x)=(1-x)^\alpha\rightarrow w(-1)=2^\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=\beta=0\rightarrow\hat{f}_i(1)=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\dfrac{2}{(N+1)P_{N-1}^{(1,1)}(x_i)}\dfrac{P_N^{(0,0)}(1)}{1-x_i} \qquad \hat{f}_i(-1)=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\dfrac{2}{(N+1)P_{N-1}^{(1,1)}(x_i)}\dfrac{P_N^{(0,0)}(-1)}{1+x_i} \quad mais \quad \dfrac{w'(x)}{w(x)}\equiv 0\\ \alpha=0\quad\beta>0\rightarrow\hat{f}_i(1)=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\dfrac{2^\beta}{(1+x_i)^\beta}}\dfrac{2}{(N+\beta+1)P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x_i)}\dfrac{P_N^{(0,\beta)}(1)}{1-x_i} \qquad \hat{f}_i(-1)=0\\ \alpha>0\quad\beta=0\rightarrow\hat{f}_i(1)=0 \qquad \hat{f}_i(-1)=-\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\dfrac{2^\alpha}{(1-x_i)^\alpha}}\dfrac{2}{(N+\alpha+1)P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x_i)}\dfrac{P_N^{(\alpha,0)}(-1)}{1+x_i}\\ \alpha>0\quad\beta>0\rightarrow\hat{f}_i(1)=\hat{f}_i(-1)=0\end{cases}$$

*Étant donné les relations existantes sur les poids de Gauss :*

$$\alpha=\beta=0\rightarrow\lambda_i\left(N+1\right)^2\left(P_{N-1}^{(1,1)}\left(x_i\right)\right)^2=\frac{8}{1-x_i^{\,2}}$$

$$\alpha=0\quad\beta>0\rightarrow\lambda_i\left(1+x_i\right)^\beta\left(N+\beta+1\right)^2\left(P_{N-1}^{(1,\beta+1)}\left(x_i\right)\right)^2=\frac{2^{\beta+3}}{1-x_i^{\,2}}$$

$$\alpha>0\quad\beta=0\rightarrow\lambda_i\left(1-x_i\right)^\alpha\left(N+\alpha+1\right)^2\left(P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}\left(x_i\right)\right)^2=\frac{2^{\alpha+3}}{1-x_i^{\,2}}$$

*Ainsi que les valeurs des polynômes de Jacobi en +1 et -1 :* $P_N^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{(N+\alpha)!}{N!\,\alpha!}\qquad P_N^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^N\frac{(N+\beta)!}{N!\,\beta!}$

*Il vient, en tenant compte de facteur de signe lié à l'alternance sur les racines des polynômes de Jacobi :*

$$\begin{cases}\alpha=\beta=0\rightarrow\hat{f}_i(1)=\frac{(-1)^{i+N}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+x_i}{1-x_i}}\qquad\hat{f}_i(-1)=\frac{(-1)^i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-x_i}{1+x_i}}\\ \alpha=0\quad\beta>0\rightarrow\hat{f}_i(1)=\frac{(-1)^{i+N}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+x_i}{1-x_i}}\qquad\hat{f}_i(-1)=0\\ \alpha>0\quad\beta=0\rightarrow\hat{f}_i(1)=0\qquad\hat{f}_i(-1)=\frac{(-1)^i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-x_i}{1+x_i}}\\ \alpha>0\quad\beta>0\rightarrow\hat{f}_i(1)=\hat{f}_i(-1)=0\end{cases}$$

*Ce qui conduit au résultat pour l'opérateur « dérivée première » :*

$$i\neq j\rightarrow\left[\mathbf{D}_{i,j}^1\right]=\int_a^b dx\;\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_j{}'(x)=\frac{1}{2}\times\left[\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_a^b+\frac{1}{2}\int_a^b dx\;\hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)+\sqrt{\lambda_i}\,\hat{f}_j{}'(x_i)=\frac{1}{2}\times\left[\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_a^b+\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}f_j{}'(x_i)-\frac{\sqrt{\lambda_j}}{2}f_i{}'(x_j)$$

$$i=j\rightarrow\left[\mathbf{D}_{i,i}^1\right]=\int_a^b dx\;\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_i{}'(x)=\frac{1}{2}\times\left[\left(\hat{f}_i(x)\right)^2\right]_a^b$$

*Il est encore possible de calculer exactement les éléments matriciels de l'opérateur potentiel* ***W''=w''(x)/w(x)*** *:*

$$\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)=w(x)g_i(x)g_j(x)\quad avec\quad g_i(x)\,g_j(x)=Pol_{2N-2}(x)$$

$$\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)''-2\times\frac{w'(x)}{w(x)}\times\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'-\hat{f}_i(x)\times\frac{w''(x)}{w(x)}\times\hat{f}_j(x)+2\hat{f}_i(x)\times\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2\times\hat{f}_i(x)=Pol_{2N-4}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)=\frac{w''(x)}{w(x)}-\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2\quad et\quad\frac{w'(x)}{w(x)}\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'=\frac{d}{dx}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)$$

$$-2\times\frac{w'(x)}{w(x)}\times\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'-\hat{f}_i(x)\times\frac{w''(x)}{w(x)}\times\hat{f}_j(x)+2\hat{f}_i(x)\times\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2\times\hat{f}_i(x)=$$

$$=-2\frac{d}{dx}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)+2\left(\frac{w''(x)}{w(x)}-\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2\right)\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)-\hat{f}_i(x)\times\frac{w''(x)}{w(x)}\times\hat{f}_j(x)+2\hat{f}_i(x)\times\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2\times\hat{f}_i(x)$$

$$=-2\frac{d}{dx}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)+\frac{w''(x)}{w(x)}\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)$$

$$\Rightarrow\int_a^b dx\left(\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)''-2\frac{d}{dx}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)+\frac{w''(x)}{w(x)}\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)=$$

$$=\sqrt{\lambda_j}\hat{f}_i''(x_j)+\sqrt{\lambda_i}\hat{f}_j''(x_i)+2\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l\hat{f}_i'(x_l)\hat{f}_j'(x_l)-2\sqrt{\lambda_i}\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\hat{f}_j'(x_i)-2\sqrt{\lambda_j}\frac{w'(x_j)}{w(x_j)}\hat{f}_i'(x_j)+\left(2\left(\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\right)^2-\frac{w''(x_i)}{w(x_i)}\right)\delta_{i,j}$$

$$\Rightarrow\left[\mathbf{W}''_{i,j}\right]=\int_a^b dx\left(\frac{w''(x)}{w(x)}\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)=\begin{bmatrix}2\left[\frac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_a^b-\left[\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'\right]_a^b+\sqrt{\lambda_j}\hat{f}_i''(x_j)+\sqrt{\lambda_i}f_j''(x_i)+2\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l\hat{f}_i'(x_l)\hat{f}_j'(x_l)-\\-2\sqrt{\lambda_i}\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\hat{f}_j'(x_i)-2\sqrt{\lambda_j}\frac{w'(x_j)}{w(x_j)}\hat{f}_i'(x_j)+\left(2\left(\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\right)^2-\frac{w''(x_i)}{w(x_i)}\right)\delta_{i,j}\end{bmatrix}$$

*Là encore* $w(a)=w(b)=0\Rightarrow\hat{f}_i(a)=\hat{f}_j(a)=\hat{f}_i(b)=\hat{f}_j(b)=0$ *dans la plupart des cas soit :*

$$\left[\mathbf{W}''_{i,j}\right]=\int_a^b dx\left(\frac{w''(x)}{w(x)}f_i(x)f_j(x)\right)=\begin{bmatrix}2\times\left[\frac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_a^b+\sqrt{\lambda_j}\hat{f}_i''(x_j)+\sqrt{\lambda_i}\hat{f}_j''(x_i)+2\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l\hat{f}_i'(x_l)\hat{f}_j'(x_l)-\\-2\sqrt{\lambda_i}\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\hat{f}_j'(x_i)-2\sqrt{\lambda_j}\frac{w'(x_j)}{w(x_j)}\hat{f}_i'(x_j)+\left(2\left(\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\right)^2-\frac{w''(x_i)}{w(x_i)}\right)\delta_{i,j}\end{bmatrix}$$

*Toutefois il se trouve que parfois l'expression* $\left[\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'\right]_a^b$ *ne s'annule pas, il en est ainsi avec les fonctions de Lagrange-Jacobi pour l'évaluation des fonctions (α et β tous deux entiers positifs ou nuls) :*

$$\begin{cases}\alpha=\beta=0\rightarrow\hat{f}_i(1)=\frac{(-1)^{i+N}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+x_i}{1-x_i}}\qquad\hat{f}_i(-1)=\frac{(-1)^i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-x_i}{1+x_i}}\\\alpha=0\quad\beta>0\rightarrow\hat{f}_i(1)=\frac{(-1)^{i+N}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+x_i}{1-x_i}}\qquad\hat{f}_i(-1)=0\\\alpha>0\quad\beta=0\rightarrow\hat{f}_i(1)=0\qquad\hat{f}_i(-1)=\frac{(-1)^i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-x_i}{1+x_i}}\\\alpha>0\quad\beta>0\rightarrow\hat{f}_i(1)=\hat{f}_i(-1)=0\end{cases}$$

*Mais également pour les dérivées premières des fonctions de Lagrange-Jacobi, ainsi que leurs produit avec la fonction elle-même qui résout certaines formes indéterminées aux bornes de l'intervalle :*

$$\hat{f}_i(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\,\frac{1}{x-x_i}\,\frac{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_N^{(\alpha,\beta)\prime}(x_i)}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{w(x)}\,g_i(x)\qquad g_i(x)=\sqrt{\frac{1}{w(x_i)}}\,\frac{2}{(N+\alpha+\beta+1)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i)}\,\frac{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-x_i}$$

$$g_i'(x)=\sqrt{\frac{1}{w(x_i)}}\,\frac{1}{P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i)}\left(\frac{P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)}{x-x_i}-\frac{2\,P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{(N+\alpha+\beta+1)(x-x_i)^2}\right)\qquad \hat{f}_i'(x)=\frac{w'(x)}{2w(x)}\hat{f}_i(x)+\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{w(x)}\,g_i'(x)$$

$$\alpha>0\quad\beta>0\rightarrow\hat{f}_i'(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\,\frac{1}{(x-x_i)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i)}\left(\frac{\beta(1-x)-\alpha(1+x)}{1-x^2}\,\frac{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{N+\alpha+\beta+1}+P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)-\frac{2\,P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{(N+\alpha+\beta+1)(x-x_i)}\right)$$

$$\Rightarrow\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)=\frac{2(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\sqrt{(1-x_i)^{\alpha}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_i)^{\beta}(1+x_j)^{\beta}}\,(N+\alpha+\beta+1)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_j)(x-x_i)(x-x_j)}\times$$

$$\times\left((\beta(1-x)-\alpha(1+x))\,\frac{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{N+\alpha+\beta+1}+(1-x^2)\,P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)-\frac{2(1-x^2)P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{(N+\alpha+\beta+1)(x-x_i)}\right)$$

$$\alpha=\beta=0\rightarrow\hat{f}_i'(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}g_i'(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\,\frac{1}{P_{N-1}^{(1,1)}(x_i)(x-x_i)}\left(P_{N-1}^{(1,1)}(x)-\frac{2}{N+1}\,\frac{P_N^{(0,0)}(x)}{x-x_i}\right)$$

$$\Rightarrow\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\,\frac{2\,P_N^{(0,0)}(x)}{(N+1)P_{N-1}^{(1,1)}(x_i)P_{N-1}^{(1,1)}(x_j)(x-x_i)(x-x_j)}\left(P_{N-1}^{(1,1)}(x)-\frac{2}{N+1}\,\frac{P_N^{(0,0)}(x)}{x-x_i}\right)$$

$$\alpha=0\quad\beta>0\rightarrow\hat{f}_i'(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{(1+x)^{\beta}}{(1+x_i)^{\beta}}}\times\frac{1}{(x-x_i)P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x_i)}\left(\frac{\beta}{1+x}\,\frac{P_N^{(0,\beta)}(x)}{N+\beta+1}+P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x)-\frac{2P_N^{(0,\beta)}(x)}{(N+\beta+1)(x-x_i)}\right)$$

$$\Rightarrow\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)=\frac{2(1+x)^{\beta-1}P_N^{(0,\beta)}(x)}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\sqrt{(1+x_i)^{\beta}(1+x_j)^{\beta}}\,(N+\beta+1)P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x_i)P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x_j)(x-x_i)(x-x_j)}\times\left(\beta\,\frac{P_N^{(0,\beta)}(x)}{N+\beta+1}+(1+x)\,P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x)-\frac{2(1+x)P_N^{(0,\beta)}(x)}{(N+\beta+1)(x-x_i)}\right)$$

$$\alpha>0\quad\beta=0\rightarrow\hat{f}_i'(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{(1-x)^{\alpha}}{(1-x_i)^{\alpha}}}\,\frac{1}{(x-x_i)P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x_i)}\left(-\frac{\alpha}{1-x}\,\frac{P_N^{(\alpha,0)}(x)}{N+\alpha+1}+P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x)-\frac{2\,P_N^{(\alpha,0)}(x)}{(N+\alpha+1)(x-x_i)}\right)$$

$$\Rightarrow\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)=\frac{2(1-x)^{\alpha-1}P_N^{(\alpha,0)}(x)}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\sqrt{(1-x_i)^{\alpha}(1-x_j)^{\alpha}}\,(N+\alpha+1)P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x_i)P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x_j)(x-x_i)(x-x_j)}\times\left(-\alpha\,\frac{P_N^{(\alpha,0)}(x)}{N+\alpha+1}+(1-x)\,P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x)-\frac{2(1-x)P_N^{(\alpha,0)}(x)}{(N+\alpha+1)(x-x_i)}\right)$$

*Soit encore pour la somme des produits* $\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)+\hat{f}_j'(x)\hat{f}_i(x)$ *:*

$\alpha>0 \quad \beta>0$

$$\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)+\hat{f}_j'(x)\hat{f}_i(x)=\frac{4(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\sqrt{(1-x_i)^{\alpha}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_i)^{\beta}(1+x_j)^{\beta}}(N+\alpha+\beta+1)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_j)(x-x_i)(x-x_j)}\times$$

$$\times\left((\beta(1-x)-\alpha(1+x))\frac{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{N+\alpha+\beta+1}+(1-x^2)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)-\frac{(1-x^2)P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{(N+\alpha+\beta+1)}\left(\frac{1}{x-x_i}+\frac{1}{x-x_j}\right)\right)$$

$\alpha=\beta=0$

$$\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)+\hat{f}_j'(x)\hat{f}_i(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\frac{4P_N^{(0,0)}(x)}{(N+1)P_{N-1}^{(1,1)}(x_i)P_{N-1}^{(1,1)}(x_j)(x-x_i)(x-x_j)}\times\left(P_{N-1}^{(1,1)}(x)-\frac{P_N^{(0,0)}(x)}{N+1}\left(\frac{1}{x-x_i}+\frac{1}{x-x_j}\right)\right)$$

$\alpha=0 \quad \beta>0$

$$\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)+\hat{f}_j'(x)\hat{f}_i(x)=\frac{4(1+x)^{\beta-1}P_N^{(0,\beta)}(x)}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\sqrt{(1+x_i)^{\beta}(1+x_j)^{\beta}}(N+\beta+1)P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x_i)P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x_j)(x-x_i)(x-x_j)}\times$$

$$\times\left(\beta\frac{P_N^{(0,\beta)}(x)}{N+\beta+1}+(1+x)P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x)-\frac{(1+x)P_N^{(0,\beta)}(x)}{N+\beta+1}\left(\frac{1}{x-x_i}+\frac{1}{x-x_j}\right)\right)$$

$\alpha>0 \quad \beta=0$

$$\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)+\hat{f}_j'(x)\hat{f}_i(x)=\frac{4(1-x)^{\alpha-1}P_N^{(\alpha,0)}(x)}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\sqrt{(1-x_i)^{\alpha}(1-x_j)^{\alpha}}(N+\alpha+1)P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x_i)P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x_j)(x-x_i)(x-x_j)}\times$$

$$\times\left(-\alpha\frac{P_N^{(\alpha,0)}(x)}{N+\alpha+1}+(1-x)P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x)-\frac{(1-x)P_N^{(\alpha,0)}(x)}{N+\alpha+1}\left(\frac{1}{x-x_i}+\frac{1}{x-x_j}\right)\right)$$

*Etant donné la relation existante sur les poids de Gauss de la grille de Lagrange-Jacobi :*

$$\lambda_i(1-x_i)^{\alpha}(1+x_i)^{\beta}(N+\alpha+\beta+1)^2\left(P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i)\right)^2=\frac{2^{\alpha+\beta+3}}{1-x_i^{\,2}}\frac{(N+\alpha)!(N+\beta)!}{N!(N+\alpha+\beta)!}$$

$$\alpha=\beta=0\rightarrow\lambda_i(N+1)^2\left(P_{N-1}^{(1,1)}(x_i)\right)^2=\frac{8}{1-x_i^{\,2}}$$

$$\alpha=0 \quad \beta>0\rightarrow\lambda_i(1+x_i)^{\beta}(N+\beta+1)^2\left(P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x_i)\right)^2=\frac{2^{\beta+3}}{1-x_i^{\,2}}$$

$$\alpha>0 \quad \beta=0\rightarrow\lambda_i(1-x_i)^{\alpha}(N+\alpha+1)^2\left(P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x_i)\right)^2=\frac{2^{\alpha+3}}{1-x_i^{\,2}}$$

*Ces valeurs se simplifient (en passant sous la racine les valeurs des polynômes de Jacobi, il apparaît un terme de compensation $(-1)^{i-j}$ ) :*

$\alpha > 0 \quad \beta > 0$

$$\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)+\hat{f}_j'(x)\hat{f}_i(x)=(-1)^{i-j}\frac{(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}P_N^{(\alpha,\beta)}(x)N!(N+\alpha+\beta)!(N+\alpha+\beta+1)\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{2^{\alpha+\beta+1}(N+\alpha)!(N+\beta)!(x-x_i)(x-x_j)}\times$$

$$\times\left((\beta(1-x)-\alpha(1+x))\frac{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{N+\alpha+\beta+1}+(1-x^2)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)-\frac{(1-x^2)P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{(N+\alpha+\beta+1)}\left(\frac{1}{x-x_i}+\frac{1}{x-x_j}\right)\right)$$

$\alpha = \beta = 0$

$$\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)+\hat{f}_j'(x)\hat{f}_i(x)=(-1)^{i-j}\frac{P_N^{(0,0)}(x)(N+1)\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{2(x-x_i)(x-x_j)}\times\left(P_{N-1}^{(1,1)}(x)-\frac{P_N^{(0,0)}(x)}{N+1}\left(\frac{1}{x-x_i}+\frac{1}{x-x_j}\right)\right)$$

$\alpha = 0 \quad \beta > 0$

$$\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)+\hat{f}_j'(x)\hat{f}_i(x)=(-1)^{i-j}\frac{(1+x)^{\beta-1}P_N^{(0,\beta)}(x)(N+\beta+1)\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{2^{\beta+1}(x-x_i)(x-x_j)}\times\left(\beta\frac{P_N^{(0,\beta)}(x)}{N+\beta+1}+(1+x)P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x)-\frac{(1+x)P_N^{(0,\beta)}(x)}{N+\beta+1}\left(\frac{1}{x-x_i}+\frac{1}{x-x_j}\right)\right)$$

$\alpha > 0 \quad \beta = 0$

$$\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)+\hat{f}_j'(x)\hat{f}_i(x)=(-1)^{i-j}\frac{(1-x)^{\alpha-1}P_N^{(\alpha,0)}(x)(N+\alpha+1)\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{2^{\alpha+1}(x-x_i)(x-x_j)}\times\left(-\alpha\frac{P_N^{(\alpha,0)}(x)}{N+\alpha+1}+(1-x)P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x)-\frac{(1-x)P_N^{(\alpha,0)}(x)}{N+\alpha+1}\left(\frac{1}{x-x_i}+\frac{1}{x-x_j}\right)\right)$$

*Il faut également tenir compte du fait que les valeurs des polynômes de Jacobi en +1 et -1 sont connues, ainsi :*

$$P_N^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{(N+\alpha)!}{N!\,\alpha!}\qquad P_N^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^N\frac{(N+\beta)!}{N!\,\beta!}$$

*Cela donne pour la somme des produits* $\hat{f}_i'(x)\hat{f}_j(x)+\hat{f}_j'(x)\hat{f}_i(x)$ *sur les bornes de l'intervalle, les valeurs suivantes pour tous les cas de figure :*

$$Si \quad \alpha>1 \quad et \quad \beta>1 \quad \hat{f}_i'(-1)\hat{f}_j(-1)+\hat{f}_j'(-1)\hat{f}_i(-1)=\hat{f}_i'(1)\hat{f}_j(1)+\hat{f}_j'(1)\hat{f}_j(1)=0$$

$$Si \quad \alpha=1 \quad et \quad \beta>1 \quad \begin{cases} \hat{f}_i'(-1)\hat{f}_j(-1)+\hat{f}_j'(-1)\hat{f}_i(-1)=0 \qquad \hat{f}_i'(1)\hat{f}_j(1)+\hat{f}_j'(1)\hat{f}_i(1)=(-1)^{i-j+1}\dfrac{(N+1)(N+1+\beta)\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1-x_i)(1-x_j)} \end{cases}$$

$$Si \quad \alpha>1 \quad et \quad \beta=1 \quad \begin{cases} \hat{f}_i'(1)\hat{f}_j(1)+\hat{f}_j'(1)\hat{f}_i(1)=0 \qquad \hat{f}_i'(-1)\hat{f}_j(-1)+\hat{f}_j'(-1)\hat{f}_i(-1)=(-1)^{i-j}\dfrac{(N+1)(N+\alpha+1)\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1+x_i)(1+x_j)} \end{cases}$$

$$Si \quad \alpha=\beta=1 \quad \begin{cases} \hat{f}_i'(1)\hat{f}_j(1)+\hat{f}_j'(1)\hat{f}_i(1)=(-1)^{i-j+1}\dfrac{(N+1)(N+2)\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1-x_i)(1-x_j)} \\ \hat{f}_i'(-1)\hat{f}_j(-1)+\hat{f}_j'(-1)\hat{f}_i(-1)=(-1)^{i-j}\dfrac{(N+1)(N+2)\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1+x_i)(1+x_j)} \end{cases}$$

$$\alpha=\beta=0 \quad \begin{cases} \hat{f}_i'(1)\hat{f}_j(1)+\hat{f}_j'(1)\hat{f}_i(1)=(-1)^{i-j}\dfrac{(N+1)\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{2(1-x_i)(1-x_j)}\times\left(N-\dfrac{1}{N+1}\left(\dfrac{1}{1-x_i}+\dfrac{1}{1-x_j}\right)\right) \\ \hat{f}_i'(-1)\hat{f}_j(-1)+\hat{f}_j'(-1)\hat{f}_i(-1)=(-1)^{i-j-1}\dfrac{(N+1)\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{2(1+x_i)(1+x_j)}\times\left(N-\dfrac{1}{N+1}\left(\dfrac{1}{1+x_i}+\dfrac{1}{1+x_j}\right)\right) \end{cases}$$

$$\alpha=0 \quad \beta>1 \quad \begin{cases} \hat{f}_i'(1)\hat{f}_j(1)+\hat{f}_j'(1)\hat{f}_i(1)=(-1)^{i-j}\dfrac{\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1-x_i)(1-x_j)}\times\left(\beta+2N(N+\beta+1)-2\left(\dfrac{1}{1-x_i}+\dfrac{1}{1-x_j}\right)\right) \\ \hat{f}_i'(-1)\hat{f}_j(-1)+\hat{f}_j'(-1)\hat{f}_i(-1)=0 \end{cases}$$

$$\alpha=0 \quad \beta=1 \quad \begin{cases} \hat{f}_i'(1)\hat{f}_j(1)+\hat{f}_j'(1)\hat{f}_i(1)=(-1)^{i-j}\dfrac{\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1-x_i)(1-x_j)}\left(1+2N(N+2)-2\left(\dfrac{1}{1-x_i}+\dfrac{1}{1-x_j}\right)\right) \\ \hat{f}_i'(-1)\hat{f}_j(-1)+\hat{f}_j'(-1)\hat{f}_i(-1)=(-1)^{i-j}\dfrac{(N+1)^2\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1+x_i)(1+x_j)} \end{cases}$$

$$\alpha>1 \quad \beta=0 \quad \begin{cases} \hat{f}_i'(1)\hat{f}_j(1)+\hat{f}_j'(1)\hat{f}_i(1)=0 \\ \hat{f}_i'(-1)\hat{f}_j(-1)+\hat{f}_j'(-1)\hat{f}_i(-1)=-(-1)^{i-j}\dfrac{\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1+x_i)(1+x_j)}\times\left(\alpha+2\,N(N+\alpha+1)-2\left(\dfrac{1}{1+x_i}+\dfrac{1}{1+x_j}\right)\right) \end{cases}$$

$$\alpha=1 \quad \beta=0 \quad \begin{cases} \hat{f}_i'(1)\hat{f}_j(1)+\hat{f}_j'(1)\hat{f}_i(1)=-(-1)^{i-j}\dfrac{(N+1)^2\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1-x_i)(1-x_j)} \\ \hat{f}_i'(-1)\hat{f}_j(-1)+\hat{f}_j'(-1)\hat{f}_i(-1)=-(-1)^{i-j}\dfrac{\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1+x_i)(1+x_j)}\times\left(1+2\,N(N+2)-2\left(\dfrac{1}{1+x_i}+\dfrac{1}{1+x_j}\right)\right) \end{cases}$$

*Pour le terme* $\left[\frac{w'(x)}{w(x)}\times \hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_a^b$ *son annulation n'est également pas systématique aux bornes de l'intervalle toujours la grille de Lagrange-Jacobi, nous avons :*

$$\hat{f}_i(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\frac{1}{x-x_i}\frac{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_N^{(\alpha,\beta)\prime}(x_i)}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{w(x)}\,g_i(x)\qquad g_i(x)=\sqrt{\frac{1}{w(x_i)}}\frac{2}{(N+\alpha+\beta+1)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i)}\frac{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-x_i}$$

$$\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)=(-1)^{i-j}\frac{(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}\left(\beta(1-x)-\alpha(1+x)\right)\left(P_N^{(\alpha,\beta)}(x)\right)^2}{2^{\alpha+\beta+1}}\frac{N!(N+\alpha+\beta)!}{(N+\alpha)!(N+\beta)!}\frac{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}{(x-x_i)(x-x_j)}$$

$$\alpha=\beta=0\rightarrow\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)=0$$

$$\alpha>1\quad\beta>1\rightarrow\frac{w'(-1)}{w(-1)}\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)=\frac{w'(1)}{w(1)}\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)=0$$

$$\alpha=1\quad\beta>1\rightarrow\frac{w'(-1)}{w(-1)}\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)=0\qquad\frac{w'(1)}{w(1)}\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)=-(-1)^{i-j}\frac{(N+1)(N+1+\beta)}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}{(1-x_i)(1-x_j)}$$

$$\alpha>1\quad\beta=1\rightarrow\frac{w'(-1)}{w(-1)}\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)=(-1)^{i-j}\frac{(N+1)(N+1+\alpha)}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}{(1+x_i)(1+x_j)}\qquad\frac{w'(1)}{w(1)}\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)=0$$

$$\alpha=1\quad\beta=1\rightarrow\frac{w'(-1)}{w(-1)}\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)=(-1)^{i-j}\frac{(N+1)(N+2)}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}{(1+x_i)(1+x_j)}\qquad\frac{w'(1)}{w(1)}\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)=-(-1)^{i-j}\frac{(N+1)(N+2)}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}{(1-x_i)(1-x_j)}$$

$$\alpha=0\quad\beta>1\rightarrow\frac{w'(-1)}{w(-1)}\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)=0\quad\frac{w'(1)}{w(1)}\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)=(-1)^{i-j}\frac{\beta}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}{(1-x_i)(1-x_j)}$$

$$\alpha=0\quad\beta=1\rightarrow\frac{w'(-1)}{w(-1)}\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)=(-1)^{i-j}\frac{(N+1)^2}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}{(1+x_i)(1+x_j)}\quad\frac{w'(1)}{w(1)}\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)=(-1)^{i-j}\frac{1}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}{(1-x_i)(1-x_j)}$$

$$\alpha>1\quad\beta=0\rightarrow\frac{w'(-1)}{w(-1)}\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)=-(-1)^{i-j}\frac{\alpha}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}{(1+x_i)(1+x_j)}\quad\frac{w'(1)}{w(1)}\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)=0$$

$$\alpha=1\quad\beta=0\rightarrow\frac{w'(-1)}{w(-1)}\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)=-(-1)^{i-j}\frac{1}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}{(1+x_i)(1+x_j)}\quad\frac{w'(1)}{w(1)}\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)=-(-1)^{i-j}\frac{(N+1)^2}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}{(1-x_i)(1-x_j)}$$

*Les fonctions de Lagrange construites à partir des polynômes associés de Legendre*

*Venons en à la quadrature choisie à partir des polynômes associés de Legendre. Ces derniers sont définis comme des polynômes orthogonaux selon le poids w(x)=(1-x²)^m sur l'intervalle [-1,1], soit :*

$$w(x)=\left(1-x^2\right)^m \qquad \int_{-1}^{+1} dx\,\left(1-x^2\right)^m p_{N,m}(x)p_{N',m}(x)=h_N\delta_{N,N'}$$

*Pour de tels polynômes il est d'usage de prendre justement les fonctions associées de Legendre ou fonctions de Ferrer comme fonctions correspondantes $\varphi_N(x)$ au signe près :*

$$\varphi_N(x)=\mathrm{P}_{N+m}^m(x) \quad p_{N+m}^m(x)=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}\mathrm{P}_{N+m}^m(x)$$

*On peut également définir ces polynômes par la dérivée m-ième du polynôme de Legendre, soit :*

$$p_{N+m}^m(x)=\frac{d^m}{dx^m}P_{N+m}(x)$$

*Les fonctions σ(x) et τ(x) sont les suivantes :* $\sigma(x)=1-x^2 \qquad \tau(x)=-2(m+1)x$. *L'équation différentielle des polynômes associées de Legendre est donc la suivante :*

$$d_N=2(m+1)+(N-1)=N+2m+1\Rightarrow\left(1-x^2\right)p_{N+m}^m{}''(x)-2(m+1)p_{N+m}^m{}'(x)+N(N+2m+1)p_{N+m}^m(x)=0$$

*La norme pondérée de ces polynômes ainsi que le coefficient de degré maximal N du polynôme sont les suivants :*

$$\begin{cases} h_N=\dfrac{2}{2N+2m+1}\times\dfrac{(N+2m)!}{N!} \\ k_{N,N}=\dfrac{(2N+2m)!}{2^{N+m}N!(N+m)!} \quad k_{N-1,N}=0 \end{cases}$$

*La relation de récurrence de ces polynômes associées de Legendre est la suivante :*

$$(N+1)p_{N+1+m}^m(x)=(2N+2m+1)\,x\;p_{N+m}^m(x)-(N+2m)p_{N-1+m}^m(x)=0$$

*La dérivée première du polynôme associé de Legendre s'exprime alors sous la forme :*

$$\sigma'(0)=0 \qquad \sigma''(x)=-2 \quad \frac{k_{N-1,N}}{k_{N,N}}=0 \qquad \frac{k_{N-1,N-1}}{k_{N,N}}=\frac{N}{2N+2m-1} \qquad \frac{h_N}{h_{N-1}}=\frac{2N+2m-1}{2N+2m+1}\times\frac{N+2m}{N}$$
$$\Rightarrow\left(1-x^2\right)p_{N+m}^m{}'(x)=-N\,x\;p_{N+m}^m(x)+(N+2m)\,p_{N-1+m}^m(x)$$

*Les fonctions de Lagrange orthonormées définies sur les polynômes associées de Legendre sont donc les suivantes :* $i\in\{1,..,N\} \quad x_i \quad tel\ que \quad p_{N+m}^m(x_i)=0\rightarrow\hat{f}_i(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\frac{1}{p_{N+m}^m{}'(x_i)}\frac{p_{N+m}^m(x)}{x-x_i}$

*Les poids de la quadrature de Gauss, induits par ces fonctions de Lagrange, sont les suivants :*

$$p_{N+m}^{m}{}'(x_i)=(N+2m)\times\frac{p_{N-1+m}^{m}(x_i)}{1-x_i^{\,2}}\quad et\quad \lambda_i=\left(\frac{h_{N-1}k_{N,N}}{k_{N-1,N-1}}\right)^2\times\frac{\sigma(x_i)}{h_N d_{2N} w(x_i)\left(p_{N-1+m}^{m}(x_i)\right)^2}=\frac{2\times(N+2m-1)!\times\left(1-x_i^{\,2}\right)^{1-m}}{N!(N+2m)\left(p_{N-1+m}^{m}(x_i)\right)^2}$$

*Les dérivées premières et secondes des fonctions de Lagrange se calculent avec les formules générales définies ci-avant, à savoir :*

$$\begin{cases}\hat{f}_i(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\frac{1-x^2}{1-x_i^2}\right)^{\frac{m}{2}}\times\frac{prod_i(x)}{prod_i(x_i)} & \hat{f}_i{}'(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\frac{1-x^2}{1-x_i^2}\right)^{\frac{m}{2}}\times\frac{prod_i{}'(x)}{prod_i(x_i)}-\frac{m\,x}{1-x^2}\hat{f}_i(x)\\ \hat{f}_i{}''(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\frac{1-x^2}{1-x_i^2}\right)^{\frac{m}{2}}\times\frac{prod_i{}''(x)}{prod_i(x_i)}-\frac{2m\,x}{1-x^2}\hat{f}_i{}'(x)-\frac{m\left(1+(m+1)x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}\hat{f}_i(x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{f}_i(x_j)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\delta_{i,j} & i\neq j\rightarrow\hat{f}_i{}'(x_j)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\frac{1-x_j^{\,2}}{1-x_i^2}\right)^{\frac{m}{2}}\times\frac{prod_{j,i}(x_j)}{prod_i(x_i)} & i=j\rightarrow\hat{f}_i{}'(x_i)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{x_i-x_l}-\frac{m\,x_i}{1-x_i^{\,2}}\right)\\ i\neq j\rightarrow\hat{f}_i{}''(x_j)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\frac{1-x_j^{\,2}}{1-x_i^2}\right)^{\frac{m}{2}}\times\frac{prod_i{}''(x_j)}{prod_i(x_i)}-\frac{2m\,x_j}{1-x_j^{\,2}}\hat{f}_i{}'(x_j)\\ i=j\rightarrow\hat{f}_i{}''(x_i)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\frac{prod_i{}''(x_i)}{prod_i(x_i)}-\frac{m\left(1+(m+1)x_i^{\,2}\right)}{\left(1-x_i^{\,2}\right)^2}\right)-\frac{2m\,x_i}{1-x_i^{\,2}}\hat{f}_i{}'(x_i)\end{cases}$$

*Les valeurs de la dérivée première et de la dérivée de la fonction de Lagrange aux zéros des polynômes associées de Legendre sont plus précisément les suivantes après un calcul plus ou moins fastidieux :*

$$\begin{cases}i\neq j\rightarrow\hat{f}_i{}'(x_j)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\sqrt{\frac{1-x_i^{\,2}}{1-x_j^2}}\times\frac{(-1)^{i-j}}{x_j-x_i} & i=j\rightarrow\hat{f}_i{}'(x_i)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(-\frac{m\,x_i}{1-x_i^{\,2}}+\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{x_i-x_l}\right)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{x_i}{1-x_i^{\,2}}\\ i\neq j\rightarrow\hat{f}_i{}''(x_j)=2(-1)^{i-j+1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\frac{\left(1-x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-x_j^2\right)^{\frac{3}{2}}}\times\frac{1+x_jx_i-2x_j^2}{\left(x_j-x_i\right)^2} & i=j\rightarrow\hat{f}_i{}''(x_i)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(-\frac{1}{3\left(1-x_i^{\,2}\right)}\times\left((N+m)(N+m+1)+6-\frac{m^2+8}{1-x_i^2}\right)\right)\end{cases}$$

*L'équation différentielle des fonctions de Lagrange est la suivante :*

$$\left(1-x^2\right)\hat{f}_i{}''(x)-2\,x\,\hat{f}_i{}'(x)+\left((N+m)(N+m+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\hat{f}_i(x)+2\frac{\left(1-x^2\right)\hat{f}_i{}'(x)-x\,\hat{f}_i(x)}{x-x_i}=0$$

*L'opérateur différentiel cinétique T lié à cette grille de Lagrange est de la forme :*

$$T\left\{\hat{f}\right\}(x)=\left(-\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}+2\,x\,\frac{d}{dx}+\frac{m^2}{1-x^2}\right)\left(\hat{f}(x)\right)$$

*Il vient donc pour la fonction de Lagrange une équation différentielle de la forme :*

$$T\left\{\hat{f}_i\right\}(x)=-(N+m)(N+m+1)\,\hat{f}_i(x)+2\frac{\left(1-x^2\right)\hat{f}_i{}'(x)-x\,\hat{f}_i(x)}{x-x_i}$$

*Ce qui permet le calcul de la valeur :* $i\neq j\quad T\left\{\hat{f}_i\right\}(x_j)=2\frac{\left(1-x_j^2\right)\hat{f}_i{}'(x_j)}{x_j-x_i}=2\frac{(-1)^{i-j}}{\left(x_j-x_i\right)^2}\times\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\times\sqrt{\left(1-x_i^{\,2}\right)\left(1-x_j^2\right)}$

*Pour i=j, en passant directement par les expressions des dérivées première et seconde, il vient :*

$$T\left\{\hat{f}_i\right\}(x_i)=-\left(1-x_i^{\,2}\right)\hat{f}_i''(x_i)+2\,x_i\hat{f}_i'(x_i)+\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{m^2}{1-x_i^{\,2}}=\frac{1}{3\sqrt{\lambda_i}}\times\left((N+m)(N+m+1)+2\frac{m^2-1}{1-x_i^2}\right)$$

*Passons aux éléments matriciels des différents opérateurs différentiels ou potentiels. Ceux de l'opérateur différentiel cinétique T sont les suivants :*

$$i\neq j\rightarrow\left[\mathbf{T}_{i,j}\right]=\int_{-1}^{1}dx\;\hat{f}_i(x)T\left\{\hat{f}_j\right\}(x)=2\frac{(-1)^{i-j}}{(x_j-x_i)^2}\sqrt{\left(1-x_i^{\,2}\right)\left(1-x_j^2\right)}$$

$$i=j\rightarrow\left[\mathbf{T}_{i,i}\right]=\int_{-1}^{1}dx\;\hat{f}_i(x)T\left\{\hat{f}_i\right\}(x)=\frac{1}{3}\times\left((N+m)(N+m+1)+2\frac{m^2-1}{1-x_i^2}\right)$$

*Ceux de l'opérateur potentiel W' sont les suivants : à finir ca déconne peut-être*

$$\frac{w'(x)}{w(x)}=-\frac{2mx}{1-x^2}\Rightarrow\left[\mathbf{W}'_{i,j}\right]=\int_{-1}^{1}dx\;\hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)=\left[\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_{-1}^{1}+\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\delta_{i,j}-\sqrt{\lambda_j}\hat{f}_i'(x_j)-\sqrt{\lambda_i}\hat{f}_j'(x_i)$$

$$Pour\quad m\geq 1\quad\left[\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_{-1}^{1}=0$$

$$\begin{cases}i\neq j\rightarrow\left[\mathbf{W}'_{i,j}\right]=-\sqrt{\lambda_j}\hat{f}_i'(x_j)-\sqrt{\lambda_i}\hat{f}_j'(x_i)=\dfrac{(-1)^{i-j}}{x_j-x_i}\left(\sqrt{\dfrac{1-x_j^{\,2}}{1-x_i^2}}-\sqrt{\dfrac{1-x_i^{\,2}}{1-x_j^2}}\right)=-(-1)^{i-j}\dfrac{x_i+x_j}{\sqrt{\left(1-x_i^{\,2}\right)\left(1-x_j^{\,2}\right)}}\\ i=j\rightarrow\left[\mathbf{W}'_{i,i}\right]=\dfrac{w'(x_i)}{w(x_i)}-2\sqrt{\lambda_i}\hat{f}_i'(x_i)=-2\dfrac{(m+1)x_i}{1-x_i^{\,2}}\end{cases}$$

*Par conséquent ceux de l'opérateur différentiel « dérivée première » prennent la forme :*

$$i\neq j\rightarrow\left[\mathbf{D}^1_{i,j}\right]=\int_{-1}^{1}dx\;\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_j'(x)=\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\hat{f}_j'(x_i)-\frac{\sqrt{\lambda_j}}{2}\hat{f}_i'(x_j)=-\frac{1}{2}\times\frac{(-1)^{i-j}\left(2-x_i^2+x_j^2\right)}{(x_j-x_i)\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}}$$

$$i=j\rightarrow\left[\mathbf{D}^1_{i,i}\right]=\int_{-1}^{1}dx\;\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_i'(x)=0$$

*Comme* $\dfrac{w'(x)}{w(x)}=-\dfrac{2mx}{1-x^2}\Rightarrow$

$$\begin{cases}i\neq j\rightarrow\displaystyle\int_{-1}^{1}dx\;\hat{f}_i(x)\frac{x}{1-x^2}\hat{f}_j(x)=(-1)^{i-j}\frac{x_i+x_j}{2m\sqrt{\left(1-x_i^{\,2}\right)\left(1-x_j^{\,2}\right)}}\\ i=j\rightarrow\displaystyle\int_{-1}^{1}dx\;\hat{f}_i(x)\frac{x}{1-x^2}\hat{f}_i(x)=\frac{m+1}{m}\frac{x_i}{1-x_i^{\,2}}\end{cases}$$

*Ceux de l'opérateur potentiel W'' d'après la formule originale :*

$$\left[\mathbf{W}''_{i,j}\right]=\int_{-1}^{1}dx\left(\frac{w''(x)}{w(x)}f_i(x)f_j(x)\right)=\left[\begin{array}{l}2\left[\dfrac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_{-1}^{1}-\left[\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'\right]_{-1}^{1}+\\ +\sqrt{\lambda_j}\hat{f}_i''(x_j)+\sqrt{\lambda_i}\hat{f}_j''(x_i)+2\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l\hat{f}_i'(x_l)\hat{f}_j'(x_l)-\\ -2\sqrt{\lambda_i}\dfrac{w'(x_i)}{w(x_i)}\hat{f}_j'(x_i)-2\sqrt{\lambda_j}\dfrac{w'(x_j)}{w(x_j)}\hat{f}_i'(x_j)+\left(2\left(\dfrac{w'(x_i)}{w(x_i)}\right)^2-\dfrac{w''(x_i)}{w(x_i)}\right)\delta_{i,j}\end{array}\right]$$

*sont les suivants (le calcul est très fastidieux et en partie réalisé avec les fonctions de Lagrange-Jacobi dont les fonctions de Lagrange-Legendre sont un cas particulier) :*

$$\frac{w''(x)}{w(x)}=\frac{2m\left((2m-1)x^2-1\right)}{\left(1-x^2\right)^2}\qquad avec\qquad m>1$$

$$\Rightarrow\begin{cases} i=j\rightarrow\left[\mathbf{W}''_{i,i}\right]=\int_{-1}^{1}dx\;\hat{f}_i(x)\frac{w''(x)}{w(x)}\hat{f}_i(x)=\frac{(N-1)(N+2m+2)+2(m+1)(2m(m+1)-3)x_i^2-N(N+2m+1)x_i^4}{(m+1)\left(1-x_i^2\right)^2} \\ i\neq j\rightarrow\left[\mathbf{W}''_{i,j}\right]=\int_{-1}^{1}dx\;\hat{f}_i(x)\frac{w''(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)=\frac{(-1)^{i-j}}{\sqrt{1-x_i^2}\sqrt{1-x_j^2}}\times\left(\frac{N(N+2m+1)}{m+1}(1+x_ix_j)+\frac{2(m-1)\left(1+x_ix_j\left(2-x_i^2-x_j^2-x_ix_j\right)\right)}{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}\right)\end{cases}$$

*Effectivement les deux termes* $\left[\frac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_{-1}^{1}$ *et* $\left[\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'\right]_{-1}^{1}$ *s'annulent aux bornes de l'intervalle pour m>1. Par contre ces deux termes sont non nuls pour m=1, comme nous l'avons déjà calculé dans le cadre de la grille de Lagrange-Jacobi :*

$$\begin{cases}\frac{w'(1)}{w(1)}\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)=\hat{f}_i'(1)\hat{f}_j(1)+\hat{f}_j'(1)\hat{f}_i(1)=2\frac{w'(1)}{w(1)}\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)-\left(\hat{f}_i'(1)\hat{f}_j(1)+\hat{f}_j'(1)\hat{f}_i(1)\right)=(-1)^{i-j+1}\frac{(N+1)(N+2)}{4}\frac{\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}}{(1-x_i)(1-x_j)} \\ \frac{w'(-1)}{w(-1)}\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)=\hat{f}_i'(-1)\hat{f}_j(-1)+\hat{f}_j'(-1)\hat{f}_i(-1)=2\frac{w'(-1)}{w(-1)}\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)-\left(\hat{f}_i'(-1)\hat{f}_j(-1)+\hat{f}_j'(-1)\hat{f}_i(-1)\right)=(-1)^{i-j}\frac{(N+1)(N+2)}{4}\frac{\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}}{(1+x_i)(1+x_j)}\end{cases}$$

*Ainsi il faut ajouter à l'expression précédente les deux termes correctifs pour m=1 :*

$$\begin{cases} c_{ij}=-\frac{(-1)^{i-j}(N+1)(N+2)\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}}{4}\times\left(\frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}+\frac{1}{(1+x_i)(1+x_j)}\right) \\ c_{ii}=-\frac{(N+1)(N+2)\left(1-x_i^2\right)}{4}\times\left(\frac{1}{(1-x_i)^2}+\frac{1}{(1+x_i)^2}\right)\end{cases}$$

*Soit finalement :*

$$\frac{w''(x)}{w(x)}=-\frac{2}{1-x^2}\Rightarrow\begin{cases} i=j\rightarrow\left[\mathbf{W}''_{i,i}\right]=-\int_{-1}^{1}dx\;\hat{f}_i(x)\frac{2}{1-x^2}\hat{f}_i(x)=c_{ii}+\frac{(N-1)(N+4)+4x_i^2-N(N+3)x_i^4}{2\left(1-x_i^2\right)^2}=c_{ii}+\frac{N(N+3)\left(1+x_i^2\right)-4}{2\left(1-x_i^2\right)} \\ i\neq j\rightarrow\left[\mathbf{W}''_{i,j}\right]=-\int_{-1}^{1}dx\;\hat{f}_i(x)\frac{2}{1-x^2}\hat{f}_j(x)=c_{ij}+\frac{(-1)^{i-j}}{\sqrt{1-x_i^2}\sqrt{1-x_j^2}}\times\frac{N(N+3)}{2}(1+x_ix_j)\end{cases}$$

*Les éléments matriciels de l'opérateur potentiel* ***X*** *sont trivialement :* $\left[\mathbf{X}_{i,j}\right]=x_i\delta_{i,j}$ *et ceux de l'opérateur potentiel* $\boldsymbol{X^2}$ *d'après la formule générale :* $\left[\mathbf{X}^2_{i,j}\right]=x_i^{\,2}\delta_{i,j}+(-1)^{i-j}\frac{\sqrt{\sigma(x_i)\sigma(x_j)}}{d_{2N}}$ *sont de la forme :*

$$\left[\mathbf{X}^2_{i,j}\right]=x_i^{\,2}\delta_{i,j}+(-1)^{i-j}\times\frac{\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}}{2N+2m+1}\quad i=j\rightarrow\left[\mathbf{X}^2_{i,i}\right]=\frac{2(N+m)x_i^{\,2}+1}{2N+2m+1}\qquad i\neq j\rightarrow\left[\mathbf{X}^2_{i,j}\right]=(-1)^{i-j}\times\frac{\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}}{2N+2m+1}$$

*Solution approchée de première espèce de l'équation des ondes sphéroïdales et de quelques extensions*

*A partir de ces éléments matriciels, il suffit de composer à partir de l'équation différentielle donnée les éléments matriciels correspondants pour un problème de recherche de valeurs et vecteurs propres correspondant.*

*Prenons par exemple l'équation différentielle des ondes sphéroïdales :*

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+\left(\omega+\gamma^2\left(1-x^2\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(-\left[\mathbf{T}_{i,j}\right]-\gamma^2\left[\mathbf{X}_{i,j}^2\right]+\left(\omega+\gamma^2\right)\left[\mathbf{I}_{i,j}\right]\right).\left[\mathbf{Y}_j\right]=0\Leftrightarrow\left(\left[\mathbf{T}_{i,j}\right]+\gamma^2\left[\mathbf{X}_{i,j}^2\right]-\left(\omega+\gamma^2\right)\left[\mathbf{I}_{i,j}\right]\right).\left[\mathbf{Y}_j\right]=0$$

*Les solutions de première espèce consiste donc à rechercher les valeurs propres et vecteurs propres du système matriciels précédent. La solution de première espèce est d'autant plus proche que N est grand. La solution approchée s'écrit sous la forme :*

$$\left(\left[\mathbf{T}_{i,j}\right]+\gamma^2\left[\mathbf{X}_{i,j}^2\right]-\left(\omega+\gamma^2\right)\left[\mathbf{I}_{i,j}\right]\right).\left[\mathbf{Y}_j\right]=0\Rightarrow valeur\ propre\quad\omega\quad,\quad vecteur\ propre\quad\left[\mathbf{Y}_j^{\omega}\right]\Rightarrow y(x)=\sum_{i=1}^{i=N}\hat{f}_i(x)\,\mathbf{Y}_i^{\omega}$$

*La solution est d'autant plus proche que le calcul des éléments matriciels est exacte et non approché.*

*Prenons une équation des ondes sphéroïdales généralisées et donnons le système matriciel exact correspondant :*

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+\left(\omega+\beta\,x+\gamma^2\left(1-x^2\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x)=0\Leftrightarrow\left(\left[\mathbf{T}_{i,j}\right]-\beta\left[\mathbf{X}_{i,j}\right]+\gamma^2\left[\mathbf{X}_{i,j}^2\right]-\left(\omega+\gamma^2\right)\left[\mathbf{I}_{i,j}\right]\right).\left[\mathbf{Y}_j\right]=0$$

$$\Rightarrow valeur\ propre\quad\omega\quad,\quad vecteur\ propre\quad\left[\mathbf{Y}_j^{\omega}\right]\Rightarrow y(x)=\sum_{i=1}^{i=N}\hat{f}_i(x)\,\mathbf{Y}_i^{\omega}$$

*Prenons une équation des ondes sphéroïdales encore plus générale et donnons le système matriciel exact correspondant :*

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+\left(\omega+\beta\,x+\frac{\alpha\,x}{1-x^2}+\gamma^2\left(1-x^2\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x)=0\Leftrightarrow\left(\left[\mathbf{T}_{i,j}\right]-\beta\left[\mathbf{X}_{i,j}\right]+\gamma^2\left[\mathbf{X}_{i,j}^2\right]+\frac{\alpha}{2m}\left[\mathbf{W}_{i,j}'\right]-\left(\omega+\gamma^2\right)\left[\mathbf{I}_{i,j}\right]\right).\left[\mathbf{Y}_j\right]=0$$

$$\Rightarrow valeur\ propre\quad\omega\quad,\quad vecteur\ propre\quad\left[\mathbf{Y}_j^{\omega}\right]\Rightarrow y(x)=\sum_{i=1}^{i=N}\hat{f}_i(x)\,\mathbf{Y}_i^{\omega}$$

*à finir en réalité il y a un problème d'opérateur potentielle contenant une singularité en -1 et +1, il faut peux-être faire appel à des fonctions de Lagrange-Legendre régularisée.*

*à finir mettre des exemples numériques*

*Les fonctions de Lagrange construites à partir des polynômes de Jacobi*

*Venons en à la quadrature choisie à partir des polynômes de Jacobi qui généralise en quelque sorte celle des polynômes associés de Legendre. Ces derniers sont définis comme des polynômes orthogonaux selon le poids w(x)=(1-x)$^{\alpha}$ (1+x)$^{\beta}$sur l'intervalle [-1,1], soit :*

$$w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \qquad \int_{-1}^{+1} dx\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_N^{(\alpha,\beta)}(x)P_{N'}^{(\alpha,\beta)}(x)=h_N\delta_{N,N'}$$

*Les fonctions σ(x) et τ(x) sont les suivantes :* $\sigma(x)=1-x^2 \qquad \tau(x)=\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$. *L'équation différentielle des polynômes de Jacobi est donc la suivante :*

$$d_N=N+\alpha+\beta+1 \Rightarrow (1-x^2)P_N^{(\alpha,\beta)}{}''(x)+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)P_N^{(\alpha,\beta)}{}'(x)+N(N+\alpha+\beta+1)P_N^{(\alpha,\beta)}(x)=0$$

*La norme pondérée des polynômes de Jacobi ainsi que les coefficients de degré maximal N et de degré N-1 du polynôme sont les suivants :*

$$\begin{cases} h_N=\dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{2N+\alpha+\beta+1}\times\dfrac{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}{N!\,\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \\ k_{N,N}=\dfrac{\Gamma(2N+\alpha+\beta+1)}{2^N N!\,\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \quad k_{N-1,N}=(\alpha-\beta)\dfrac{\Gamma(2N+\alpha+\beta+1)}{2^N(N-1)!\,(2N+\alpha+\beta)\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \end{cases}$$

*La relation de récurrence de ces polynômes de Jacobi est la suivante :*

$$2(N+1)(N+\alpha+\beta+1)(2N+\alpha+\beta)P_{N+1}^{(\alpha,\beta)}(x)=(2N+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2+(2N+\alpha+\beta)(2N+\alpha+\beta+2)x)P_N^{(\alpha,\beta)}(x)-$$
$$-2(N+\alpha)(N+\beta)(2N+\alpha+\beta+2)P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x)=0$$

*La dérivée première du polynôme de Jacobi s'exprime alors sous la forme :*

$$k_{N,N}=\frac{\Gamma(2N+\alpha+\beta+1)}{2^N N!\,\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \quad k_{N-1,N}=(\alpha-\beta)\frac{\Gamma(2N+\alpha+\beta+1)}{2^N(N-1)!\,(2N+\alpha+\beta)\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \quad h_N=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2N+\alpha+\beta+1}\times\frac{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}{N!\,\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}$$

$$\sigma'(0)=0 \qquad \sigma''(x)=-2 \quad \frac{k_{N-1,N}}{k_{N,N}}=\frac{N(\alpha-\beta)}{2N+\alpha+\beta} \qquad \frac{k_{N-1,N-1}}{k_{N,N}}=\frac{2N(N+\alpha+\beta)}{(2N+\alpha+\beta)(2N+\alpha+\beta-1)} \qquad \frac{h_N}{h_{N-1}}=\frac{2N+\alpha+\beta-1}{2N+\alpha+\beta+1}\times\frac{(N+\alpha)(N+\beta)}{N(N+\alpha+\beta)}$$

$$\frac{k_{N-1,N-1}}{k_{N,N}}\frac{h_N}{h_{N-1}}=\frac{2N(N+\alpha+\beta)}{(2N+\alpha+\beta)(2N+\alpha+\beta-1)}\frac{2N+\alpha+\beta-1}{2N+\alpha+\beta+1}\times\frac{(N+\alpha)(N+\beta)}{N(N+\alpha+\beta)}=\frac{2(N+\alpha)(N+\beta)}{(2N+\alpha+\beta)(2N+\alpha+\beta+1)}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)P_N^{(\alpha,\beta)}{}'(x)=\left(\frac{N(\alpha-\beta)}{2N+\alpha+\beta}-Nx\right)P_N^{(\alpha,\beta)}(x)+\frac{2(N+\alpha)(N+\beta)}{(2N+\alpha+\beta)}P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

*Les fonctions de Lagrange orthonormées définies sur les polynômes de Jacobi sont donc les suivantes :* $i\in\{1,..,N\} \quad x_i \quad tel\ que \quad P_N^{(\alpha,\beta)}(x_i)=0 \rightarrow \hat{f}_i(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\frac{1}{P_N^{(\alpha,\beta)}{}'(x_i)}\frac{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-x_i}$

*Les valeurs des fonctions de Lagrange aux bornes de l'intervalle sont nulles pour les cas α>0 et β>0. Pour les cas α=0 ou β=0, il vient :*

$$\alpha=0 \quad \beta>0 \rightarrow \hat{f}_i(1)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(1)}{w(x_i)}}\frac{1}{P_N^{(0,\beta)}{}'(x_i)}\frac{P_N^{(0,\beta)}(1)}{1-x_i}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{2^{\beta}}{(1-x_i)^{\beta}}}\frac{2}{(N+\beta+1)P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x_i)}\frac{P_N^{(0,\beta)}(1)}{1-x_i} \qquad \hat{f}_i(-1)=0$$

$$\alpha>0 \quad \beta=0 \rightarrow \hat{f}_i(1)=0 \qquad \hat{f}_i(-1)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(-1)}{w(x_i)}}\frac{1}{P_N^{(\alpha,0)}{}'(x_i)}\frac{P_N^{(\alpha,0)}(-1)}{1+x_i}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{2^{\alpha}}{(1+x_i)^{\alpha}}}\frac{2}{(N+\alpha+1)P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x_i)}\frac{P_N^{(\alpha,0)}(-1)}{1+x_i}$$

$$\alpha=\beta=0 \rightarrow \hat{f}_i(1)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{2}{(N+1)P_{N-1}^{(1,1)}(x_i)}\frac{P_N^{(0,0)}(1)}{1-x_i} \qquad \hat{f}_i(-1)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{2}{(N+1)P_{N-1}^{(1,1)}(x_i)}\frac{P_N^{(0,0)}(-1)}{1+x_i}$$

*Les poids de la quadrature de Gauss, induits par ces fonctions de Lagrange, sont les suivants :*

$$P_N^{(\alpha,\beta)\prime}(x_i)=\frac{2(N+\alpha)(N+\beta)}{(2N+\alpha+\beta)}\times\frac{P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i)}{1-x_i^{\,2}}\quad et\quad \lambda_i=\left(\frac{h_{N-1}k_{N,N}}{k_{N-1,N-1}}\right)^2\times\frac{\sigma(x_i)}{h_N d_{2N} w(x_i)\left(P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i)\right)^2}=\left(\frac{h_{N-1}k_{N,N}}{h_N k_{N-1,N-1}}\right)^2\times\frac{h_N\sigma(x_i)}{d_{2N} w(x_i)\left(P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i)\right)^2}$$

$$Or\quad \frac{h_{N-1}k_{N,N}}{h_N k_{N-1,N-1}}=\frac{(2N+\alpha+\beta)(2N+\alpha+\beta+1)}{2(N+\alpha)(N+\beta)}\to\lambda_i=\frac{2^{\alpha+\beta-1}\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)(2N+\alpha+\beta)^2}{N!\,\Gamma(N+\alpha+\beta+1)(N+\alpha)^2(N+\beta)^2\times(1-x_i)^{\alpha-1}(1+x_i)^{\beta-1}\left(P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i)\right)^2}$$

*Les poids de Gauss peuvent également s'exprimer par l'intermédiaire de la relation suivante :*

$$\left(1-x_i^{\,2}\right)P_N^{(\alpha,\beta)\prime}(x_i)=\frac{2(N+\alpha)(N+\beta)}{(2N+\alpha+\beta)}P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i)\Leftrightarrow\left(1-x_i^{\,2}\right)\frac{N+\alpha+\beta+1}{2}P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i)=\frac{2(N+\alpha)(N+\beta)}{(2N+\alpha+\beta)}P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i)$$

$$\Leftrightarrow P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i)=\left(1-x_i^{\,2}\right)\frac{(N+\alpha+\beta+1)(2N+\alpha+\beta)}{4(N+\alpha)(N+\beta)}P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i)$$

$$\lambda_i(1-x_i)^{\alpha}(1+x_i)^{\beta}(N+\alpha+\beta+1)^2\left(P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i)\right)^2=\frac{2^{\alpha+\beta+3}}{1-x_i^{\,2}}\frac{(N+\alpha)!(N+\beta)!}{N!(N+\alpha+\beta)!}$$

*L'équation différentielle des fonctions de Lagrange-Jacobi, construite d'après la formule générale , est la suivante:*

$$\sigma(x)f_i''(x)+\sigma'(x)\,f_i'(x)+\frac{3\,\sigma(x)(w'(x))^2-4w(x)(w'(x)\sigma'(x)+\sigma(x)w''(x))+(w(x))^2(2d_N(2N-1)-(N+1)\sigma''(x))}{4\,(w(x))^2}f_i(x)+$$

$$+\frac{2\sigma(x)f_i'(x)+\sigma'(x)f_i(x)}{x-x_i}=0$$

*Ici :*

$$\frac{3\,\sigma(x)(w'(x))^2-4w(x)(w'(x)\sigma'(x)+\sigma(x)w''(x))+(w(x))^2(2d_N(2N-1)-(N+1)\sigma''(x))}{4\,(w(x))^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\left((2N+\alpha+\beta)(2N+\alpha+\beta+2)-2\frac{\alpha^2+\beta^2+(\alpha^2-\beta^2)x}{1-x^2}\right)$$

*Soit :*

$$(1-x^2)f_i''(x)-2\,x\,f_i'(x)+\frac{1}{4}\left((2N+\alpha+\beta)(2N+\alpha+\beta+2)-2\frac{\alpha^2(1+x)+\beta^2(1-x)}{1-x^2}\right)f_i(x)+2\frac{(1-x^2)f_i'(x)-x\,f_i(x)}{x-x_i}=0$$

*Les fonctions intermédiaires définies comme suit :* $g(x) \propto (1-x)^{\frac{\alpha}{2}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}} P_N^{(\alpha,\beta)}(x)$ *suivent quant à elles l'équation différentielle suivante :*

$$(1-x^2)g''(x) - 2\,x\,g'(x) + \left(\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{1-x}+\frac{\beta^2}{1+x}\right)\right)g(x) = 0$$

*Il se trouve que cette dernière fonction est solution de l'équation différentielle des « fonctions associées généralisées de Legendre » que l'on note communément ici pour la fonction de première espèce:* $\varphi_N(x) \propto g(x) = P^{\alpha,\beta}_{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}(x)$*. On voit que cette fonction joue le même rôle que les fonctions associées de Legendre à l'égard des polynômes associés de Legendre. Les fonctions associées généralisées de Legendre sont donc les fonctions* $\varphi_N(x)$ *cette fois à l'égard des polynômes de Jacobi. D'ailleurs en posant* $\alpha=\beta=m$*, on obtient bien la fonction de Legendre associée* $P^m_{N+m}(x)$ *lié au polynôme associée de Legendre que l'on a noté* $p^m_{N+m}(x)$*.*

*Pour ce qui est des dérivées première et seconde des fonctions de Lagrange-Jacobi :*

*Sachant que :* $\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{\beta(1-x)-\alpha(1+x)}{1-x^2}$ $\qquad \frac{1}{4}\left(2\frac{w''(x)}{w(x)} - 3\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2\right) = -\frac{\alpha(\alpha+2)(1+x)^2+\beta(\beta+2)(1-x)^2-2\alpha\beta(1-x^2)}{4(1-x^2)^2}$

*Celles des fonctions de Lagrange se calculent avec les formules générales définies ci-avant, à savoir :*

$$\begin{cases} \hat{f}_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\times\frac{prod_i(x)}{prod_i(x_i)} \qquad f_i'(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\times\frac{prod_i'(x)}{prod_i(x_i)} + \frac{1}{2}\frac{\beta(1-x)-\alpha(1+x)}{1-x^2}\hat{f}_i(x) \\ \hat{f}_i''(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x)}{w(x_i)}}\times\frac{prod_i''(x)}{prod_i(x_i)} + \frac{\beta(1-x)-\alpha(1+x)}{1-x^2}\hat{f}_i'(x) - \frac{\alpha(\alpha+2)(1+x)^2+\beta(\beta+2)(1-x)^2-2\alpha\beta(1-x^2)}{4(1-x^2)^2}\hat{f}_i(x) \end{cases}$$

*Sur les zéros des polynômes de Jacobi, il vient :*

$$\begin{cases} \hat{f}_i(x_j) = \frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{\lambda_i}} \quad i\neq j \rightarrow \hat{f}_i'(x_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x_j)}{w(x_i)}}\frac{prod_i'(x_j)}{prod_i(x_i)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x_j)}{w(x_i)}}\frac{prod_{j,i}(x_j)}{prod_i(x_i)} \qquad i=j \rightarrow \hat{f}_i'(x_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{x_i-x_l} + \frac{1}{2}\frac{\beta(1-x_i)-\alpha(1+x_i)}{1-x_i^2}\right) \\ i\neq j \rightarrow \hat{f}_i''(x_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\frac{w(x_j)}{w(x_i)}}\times\frac{prod_i''(x_j)}{prod_i(x_i)} + \frac{\beta(1-x_j)-\alpha(1+x_j)}{1-x_j^2}\hat{f}_i'(x_j) \\ i=j \rightarrow \hat{f}_i''(x_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{prod_i''(x_i)}{prod_i(x_i)} + \frac{\beta(1-x_i)-\alpha(1+x_i)}{1-x_i^2}\hat{f}_i'(x_i) - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{\alpha(\alpha+2)(1+x_i)^2+\beta(\beta+2)(1-x_i)^2-2\alpha\beta(1-x_i^2)}{4(1-x_i^2)^2} \end{cases}$$

*Les valeurs de la dérivée première et de la dérivée de la fonction de Lagrange aux zéros des polynômes associées de Legendre sont plus précisément les suivantes après un calcul plus ou moins fastidieux :*

$$Comme \quad \sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{x_i-x_l} = \frac{(2+\alpha+\beta)x_i+\alpha-\beta}{2(1-x_i^2)} \quad et \quad \frac{prod_{j,i}(x_j)}{prod_i(x_i)} = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}}\sqrt{\frac{(1-x_i)^{\alpha+1}(1+x_i)^{\beta+1}}{(1-x_j)^{\alpha+1}(1+x_j)^{\beta+1}}}\times\frac{(-1)^{i-j}}{x_j-x_i}$$

$$i\neq j \rightarrow \hat{f}_i'(x_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\sqrt{\frac{1-x_i^2}{1-x_j^2}}\times\frac{(-1)^{i-j}}{x_j-x_i} \qquad i=j \rightarrow \hat{f}_i'(x_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{x_i}{1-x_i^2}$$

$$i\neq j \rightarrow \hat{f}_i''(x_j) = 2(-1)^{i-j+1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\frac{(1-x_i^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x_j^2)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1+x_jx_i-2x_j^2}{(1-x_j^2)(x_j-x_i)^2}$$

$$i=j \rightarrow \hat{f}_i''(x_i) = -\frac{1}{3(1-x_i^2)\sqrt{\lambda_i}}\times\left(\frac{(2N+\alpha+\beta)(2N+\alpha+\beta+2)}{4}+6-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+\beta^2+16+(\alpha^2-\beta^2)x_i}{1-x_i^2}\right)$$

*L'opérateur différentiel cinétique T lié à cette grille de Lagrange-Jacobi est de la forme :*

$$T\left\{\hat{f}_i\right\}(x)=\left(-\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}+2\,x\,\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{1-x}+\frac{\beta^2}{1+x}\right)\right)\left(\hat{f}_i(x)\right)$$

*Il vient donc pour la fonction de Lagrange-Jacobi une équation différentielle de la forme :*

$$T\left\{\hat{f}_i\right\}(x)=-\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\hat{f}_i(x)+2\frac{\left(1-x^2\right)\hat{f}_i'(x)-x\,\hat{f}_i(x)}{x-x_i}$$

*Ce qui permet le calcul de la valeur de l'opérateur cinétique :*

$$i\neq j\quad T\left\{\hat{f}_i\right\}(x_j)=2\frac{\left(1-x_j^2\right)\hat{f}_i'(x_j)}{x_j-x_i}=2\frac{(-1)^{i-j}}{\left(x_j-x_i\right)^2}\times\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\times\sqrt{\left(1-x_i^{\,2}\right)\left(1-x_j^2\right)}$$

*Pour i=j, en passant directement par les expressions des dérivées première et seconde, il vient :*

$$\hat{f}_i'(x_i)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{x_i}{1-x_i^{\,2}}\qquad\hat{f}_i''(x_i)=-\frac{1}{3\left(1-x_i^{\,2}\right)\sqrt{\lambda_i}}\times\left(\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)+6-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{1-x_i}+\frac{\beta^2}{1+x_i}\right)-\frac{8}{1-x_i^2}\right)$$

$$T\left\{\hat{f}_i\right\}(x_i)=-\left(1-x_i^{\,2}\right)\hat{f}_i''(x_i)+2\,x_i\hat{f}_i'(x_i)+\frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}}\left(\frac{\alpha^2}{1-x_i}+\frac{\beta^2}{1+x_i}\right)=\frac{1}{3\sqrt{\lambda_i}}\times\left(\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)+\frac{\alpha^2}{1-x_i}+\frac{\beta^2}{1+x_i}-\frac{2}{1-x_i^2}\right)$$

*Pour ce qui est de l'opérateur différentiel lié à l'équation différentielle des polynômes de Jacobi :*

$$J\left\{\hat{f}_i\right\}(x)=\left(\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}+\left(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\,x\right)\frac{d}{dx}\right)\left(\hat{f}(x)\right)$$

*Il vient les valeurs suivantes aux zéros des polynômes de Jacobi :*

$$\hat{f}_i'(x_i)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{x_i}{1-x_i^{\,2}}\qquad\hat{f}_i''(x_i)=-\frac{1}{3\left(1-x_i^{\,2}\right)\sqrt{\lambda_i}}\times\left(\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)+6-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{1-x_i}+\frac{\beta^2}{1+x_i}\right)-\frac{8}{1-x_i^2}\right)$$

$$\hat{f}_i'(x_j)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\sqrt{\frac{1-x_i^{\,2}}{1-x_j^2}}\times\frac{(-1)^{j-j}}{x_j-x_i}\qquad\hat{f}_i''(x_j)=2\,(-1)^{i-j+1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\frac{\left(1-x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1+x_jx_i-2x_j^2}{\left(1-x_j^2\right)\left(x_j-x_i\right)^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}J\left\{\hat{f}_i\right\}(x_i)=\left(1-x_i^{\,2}\right)\hat{f}_i''(x_i)+\left(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\,x_i\right)\hat{f}_i'(x_i)=-\dfrac{1}{3\sqrt{\lambda_i}}\times\left(\left(N+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(N+\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha^2-6\alpha\,x_i}{1-x_i}+\dfrac{\beta^2+6\beta\,x_i}{1+x_i}\right)-\dfrac{2}{1-x_i^2}\right)\\ J\left\{\hat{f}_i\right\}(x_j)=(-1)^{i-j}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\dfrac{\left(1-x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}\times\left(\dfrac{\left(1-x_j\right)\beta-\left(1+x_j\right)\alpha}{x_j-x_i}-2\dfrac{1-x_j^2}{\left(x_j-x_i\right)^2}\right)\end{cases}$$

*Passons aux éléments matriciels des différents opérateurs différentiels ou potentiels. Ceux de l'opérateur différentiel cinétique T sont les suivants :*

$$i \neq j \rightarrow \left[\mathbf{T}_{i,j}\right] = \int_{-1}^{1} dx\ \hat{f}_i(x) T\left\{\hat{f}_j\right\}(x) = 2\frac{(-1)^{i-j}\sqrt{\left(1-x_i^{\,2}\right)\left(1-x_j^{\,2}\right)}}{\left(x_j - x_i\right)^2}$$

$$i = j \rightarrow \left[\mathbf{T}_{i,i}\right] = \int_{-1}^{1} dx\ \hat{f}_i(x) T\left\{\hat{f}_i\right\}(x) = \frac{1}{3}\times\left(\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(N+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)+\frac{\alpha^2}{1-x_i}+\frac{\beta^2}{1+x_i}-\frac{2}{1-x_i^2}\right)$$

*Ceux de l'opérateur potentiel* ***X*** *sont trivialement :* $\left[\mathbf{X}_{i,j}\right] = x_i\delta_{i,j}$ *et ceux de l'opérateur potentiel* $\boldsymbol{X^2}$ *d'après la formule générale :* $\left[\mathbf{X}^2_{i,j}\right] = x_i^{\,2}\delta_{i,j} + (-1)^{i-j}\frac{\sqrt{\sigma(x_i)\sigma(x_j)}}{d_{2N}}$ *sont de la forme :*

$$\left[\mathbf{X}^2_{i,j}\right] = x_i^{\,2}\delta_{i,j} + (-1)^{i-j}\times\frac{\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}}{2N+\alpha+\beta+1} \quad i=j\rightarrow\left[\mathbf{X}^2_{i,i}\right] = \frac{(2N+\alpha+\beta)\,x_i^{\,2}+1}{2N+\alpha+\beta+1} \qquad i\neq j\rightarrow\left[\mathbf{X}^2_{i,j}\right] = (-1)^{i-j}\times\frac{\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}}{2N+\alpha+\beta+1}$$

*Ceux de l'opérateur potentiel W' sont les suivants :*

$$\int_{-1}^{1} dx\ \hat{f}_i(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x) = \left[\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_{-1}^{1} + \frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\delta_{i,j} - \sqrt{\lambda_j}f_i'(x_j) - \sqrt{\lambda_i}f_j'(x_i)$$

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{\beta}{1+x} - \frac{\alpha}{1-x} \Rightarrow \left[\mathbf{W}'_{i,j}\right] = \int_{-1}^{1} dx\ \hat{f}_i(x)\left(\frac{\beta}{1+x}-\frac{\alpha}{1-x}\right)\hat{f}_j(x) = \left[\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_{-1}^{1} + \left(\frac{\beta}{1+x_i}-\frac{\alpha}{1-x_i}\right)\delta_{i,j} - \sqrt{\lambda_j}\hat{f}_i'(x_j) - \sqrt{\lambda_i}\hat{f}_j'(x_i)$$

$$\begin{cases} i\neq j\rightarrow\left[\mathbf{W}'_{i,j}\right] = \dfrac{(-1)^{i-j}}{x_j-x_i}\left(\sqrt{\dfrac{1-x_j^{\,2}}{1-x_i^2}}-\sqrt{\dfrac{1-x_i^{\,2}}{1-x_j^2}}\right)+\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)-\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1) = -(-1)^{i-j}\dfrac{x_i+x_j}{\sqrt{\left(1-x_i^{\,2}\right)\left(1-x_j^{\,2}\right)}}+\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)-\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1) \\ i=j\rightarrow\left[\mathbf{W}'_{i,i}\right] = \left(\dfrac{\beta}{1+x_i}-\dfrac{\alpha}{1-x_i}\right)-2\dfrac{x_i}{1-x_i^{\,2}}+\left(\hat{f}_i(1)\right)^2-\left(\hat{f}_i(-1)\right)^2 = \dfrac{\beta+1}{1+x_i}-\dfrac{\alpha+1}{1-x_i}+\left(\hat{f}_i(1)\right)^2-\left(\hat{f}_i(-1)\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=0\quad\beta>0\rightarrow\hat{f}_i(1) = \sqrt{2^\beta}\dfrac{2}{\sqrt{\lambda_i(1+x_i)^\beta(N+\beta+1)^2\left(P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x_i)\right)^2}}\dfrac{P_N^{(0,\beta)}(1)}{1-x_i} \qquad \hat{f}_i(-1)=0 \\ \alpha>0\quad\beta=0\rightarrow\hat{f}_i(1)=0 \qquad \hat{f}_i(-1) = -\sqrt{2^\alpha}\dfrac{2}{\sqrt{\lambda_i(1-x_i)^\alpha(N+\alpha+1)^2\left(P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x_i)\right)^2}}\dfrac{P_N^{(\alpha,0)}(-1)}{1+x_i} \\ \alpha>0\quad\beta>0\rightarrow\hat{f}_i(1)=\hat{f}_i(-1)=0 \end{cases}$$

*Ces résultats peuvent être simplifiés sachant la valeur des poids de Gauss :*

$$\left(1-x_i^{\,2}\right)P_N^{(\alpha,\beta)\prime}(x_i) = \frac{2(N+\alpha)(N+\beta)}{(2N+\alpha+\beta)}P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i) \Leftrightarrow \left(1-x_i^{\,2}\right)\frac{N+\alpha+\beta+1}{2}P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i) = \frac{2(N+\alpha)(N+\beta)}{(2N+\alpha+\beta)}P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i)$$

$$\Leftrightarrow P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i) = \left(1-x_i^{\,2}\right)\frac{(N+\alpha+\beta+1)(2N+\alpha+\beta)}{4(N+\alpha)(N+\beta)}P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x_i)$$

$$\begin{cases} \alpha=0\quad\beta>0\quad\lambda_i = \dfrac{2^{\beta-1}(2N+\beta)^2\left(1-x_i^{\,2}\right)}{N^2(N+\beta)^2(1+x_i)^\beta\left(P_{N-1}^{(0,\beta)}(x_i)\right)^2} \Leftrightarrow \lambda_i = \dfrac{2^{\beta+3}}{(1+x_i)^\beta\left(1-x_i^{\,2}\right)(N+\beta+1)^2\left(P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x_i)\right)^2} \Leftrightarrow \lambda_i(1+x_i)^\beta(N+\beta+1)^2\left(P_{N-1}^{(1,\beta+1)}(x_i)\right)^2 = \dfrac{2^{\beta+3}}{\left(1-x_i^{\,2}\right)} \\ \alpha>0\quad\beta=0\quad\lambda_i = \dfrac{2^{\alpha-1}(2N+\alpha)^2\left(1-x_i^{\,2}\right)}{(N+\alpha)^2N^2\times(1-x_i)^\alpha\left(P_{N-1}^{(\alpha,0)}(x_i)\right)^2} \Leftrightarrow \lambda_i = \dfrac{2^{\alpha+3}}{(1-x_i)^\alpha\left(1-x_i^{\,2}\right)(N+\alpha+1)^2\left(P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x_i)\right)^2} \Leftrightarrow \lambda_i(1-x_i)^\alpha(N+\alpha+1)^2\left(P_{N-1}^{(\alpha+1,1)}(x_i)\right)^2 = \dfrac{2^{\alpha+3}}{\left(1-x_i^{\,2}\right)} \end{cases}$$

*Cela donne :*

$$\begin{cases} \alpha=0 \quad \beta>0 \rightarrow P_N^{(0,\beta)}(1)=1 \Rightarrow \hat{f}_i(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{1+x_i}{1-x_i}}\times P_N^{(0,\beta)}(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{1+x_i}{1-x_i}} \qquad \hat{f}_i(-1)=0 \\ \alpha>0 \quad \beta=0 \rightarrow \hat{f}_i(1)=0 \qquad P_N^{(\alpha,0)}(-1)=-1 \Rightarrow \hat{f}_i(-1)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{1-x_i}{1+x_i}}\times P_N^{(\alpha,0)}(-1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{1-x_i}{1+x_i}} \end{cases}$$

*Soit :*

$$\begin{cases} \alpha=0 \quad \beta>0 \rightarrow \begin{cases} i\neq j \rightarrow \left[\mathbf{W}'_{i,j}\right]=-(-1)^{i-j}\dfrac{x_i+x_j}{\sqrt{\left(1-x_i^{\,2}\right)\left(1-x_j^{\,2}\right)}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x_i}{1-x_i}\times\dfrac{1+x_j}{1-x_j}} \\ i=j \rightarrow \left[\mathbf{W}'_{i,i}\right]=\dfrac{\beta+1}{1+x_i}-\dfrac{\alpha+1}{1-x_i}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1+x_i}{1-x_i} \end{cases} \\ \alpha>0 \quad \beta=0 \rightarrow \begin{cases} i\neq j \rightarrow \left[\mathbf{W}'_{i,j}\right]=-(-1)^{i-j}\dfrac{x_i+x_j}{\sqrt{\left(1-x_i^{\,2}\right)\left(1-x_j^{\,2}\right)}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-x_i}{1+x_i}\times\dfrac{1-x_j}{1+x_j}} \\ i=j \rightarrow \left[\mathbf{W}'_{i,i}\right]=\dfrac{\beta+1}{1+x_i}-\dfrac{\alpha+1}{1-x_i}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1-x_i}{1+x_i} \end{cases} \\ \alpha>0 \quad \beta>0 \rightarrow \begin{cases} i\neq j \rightarrow \left[\mathbf{W}'_{i,j}\right]=-(-1)^{i-j}\dfrac{x_i+x_j}{\sqrt{\left(1-x_i^{\,2}\right)\left(1-x_j^{\,2}\right)}} \\ i=j \rightarrow \left[\mathbf{W}'_{i,i}\right]=\dfrac{\beta+1}{1+x_i}-\dfrac{\alpha+1}{1-x_i} \end{cases} \end{cases}$$

*Par conséquent ceux de l'opérateur différentiel « dérivée première » revêtent la forme :*

$$\begin{cases} i\neq j \rightarrow \left[\mathbf{D}^1_{i,j}\right]=\displaystyle\int_a^b dx\,\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_j{}'(x)=\frac{\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)-\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)}{2}+\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\hat{f}_j(x_i)-\frac{\sqrt{\lambda_j}}{2}\hat{f}_i(x_j)=\frac{\hat{f}_i(1)\hat{f}_j(1)-\hat{f}_i(-1)\hat{f}_j(-1)}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{(-1)^{i-j}\left(2-x_i^2+x_j^2\right)}{(x_j-x_i)\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}} \\ i=j \rightarrow \left[\mathbf{D}^1_{i,i}\right]=\displaystyle\int_a^b dx\,\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_i{}'(x)=\frac{\left(\hat{f}_i(1)\right)^2-\left(\hat{f}_i(-1)\right)^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=0 \quad \beta>0 \rightarrow \begin{cases} i\neq j \rightarrow \left[\mathbf{D}^1_{i,j}\right]=\displaystyle\int_a^b dx\,\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_j{}'(x)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1+x_i}{1-x_i}\times\frac{1+x_j}{1-x_j}}-\frac{1}{2}\times\frac{(-1)^{i-j}\left(2-x_i^2+x_j^2\right)}{(x_j-x_i)\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}} \\ i=j \rightarrow \left[\mathbf{D}^1_{i,i}\right]=\displaystyle\int_a^b dx\,\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_i{}'(x)=\frac{1}{4}\frac{1+x_i}{1-x_i} \end{cases} \\ \alpha>0 \quad \beta=0 \rightarrow \begin{cases} i\neq j \rightarrow \left[\mathbf{D}^1_{i,j}\right]=\displaystyle\int_a^b dx\,\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_j{}'(x)=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1-x_i}{1+x_i}\times\frac{1-x_j}{1+x_j}}-\frac{1}{2}\times\frac{(-1)^{i-j}\left(2-x_i^2+x_j^2\right)}{(x_j-x_i)\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}} \\ i=j \rightarrow \left[\mathbf{D}^1_{i,i}\right]=\displaystyle\int_a^b dx\,\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_i{}'(x)=-\frac{1}{4}\frac{1-x_i}{1+x_i} \end{cases} \\ \alpha>0 \quad \beta>0 \rightarrow \begin{cases} i\neq j \rightarrow \left[\mathbf{D}^1_{i,j}\right]=\displaystyle\int_a^b dx\,\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_j{}'(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{(-1)^{i-j}\left(2-x_i^2+x_j^2\right)}{(x_j-x_i)\sqrt{\left(1-x_i^2\right)\left(1-x_j^2\right)}} \\ i=j \rightarrow \left[\mathbf{D}^1_{i,i}\right]=\displaystyle\int_a^b dx\,\hat{f}_i(x)\,\hat{f}_i{}'(x)=0 \end{cases} \end{cases}$$

*Ceux de l'opérateur potentiel W'' d'après la formule originale :*

$$\left[\mathbf{W}''_{i,j}\right]=\int_{-1}^{1}dx\left(\frac{w''(x)}{w(x)}f_i(x)f_j(x)\right)=\left[\begin{array}{l}2\left[\frac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_{-1}^{1}-\left[\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'\right]_{-1}^{1}+\\+\sqrt{\lambda_j}\,\hat{f}_i''(x_j)+\sqrt{\lambda_i}\,\hat{f}_j''(x_i)+2\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l\hat{f}_i'(x_l)\hat{f}_j'(x_l)-\\-2\sqrt{\lambda_i}\,\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\hat{f}_j'(x_i)-2\sqrt{\lambda_j}\,\frac{w'(x_j)}{w(x_j)}\hat{f}_i'(x_j)+\left(2\left(\frac{w'(x_i)}{w(x_i)}\right)^2-\frac{w''(x_i)}{w(x_i)}\right)\delta_{i,j}\end{array}\right]$$

*Donne le résultat suivant après un calcul très fastidieux (et que je n'ai pas fait entièrement) pour α>1 et β>1 :*

$$Pour\quad\alpha,\beta>1\quad\frac{w'(x)}{w(x)}=\frac{\beta}{1+x}-\frac{\alpha}{1-x}\qquad\frac{w''(x)}{w(x)}=\left(\frac{\beta}{1+x}-\frac{\alpha}{1-x}\right)^2-\frac{\alpha}{(1+x)^2}-\frac{\beta}{(1-x)^2}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{(1+x)^2}+\frac{\beta(\beta-1)}{(1-x)^2}-\frac{2\alpha\beta}{1-x^2}$$

$$2\left[\frac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_{-1}^{1}=0\qquad et\qquad\left[\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'\right]_{-1}^{1}=0$$

$$\left[\mathbf{W}''_{i,j}\right]=\int_{-1}^{1}dx\,\hat{f}_i(x)\frac{w''(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)=\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{(1+x_i)^2}+\frac{\beta(\beta-1)}{(1-x_i)^2}-\frac{2\alpha\beta}{1-x_i^2}\right)\delta_{i,j}+$$

$$+\frac{(-1)^{i-j}}{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}\left(\frac{N(N+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}\left((\alpha+\beta+2)(1+x_ix_j)-(\alpha-\beta)(x_i+x_j)\right)+\frac{(\alpha+\beta-2)\left(1+x_ix_j\left(2-x_i^2-x_j^2-x_ix_j\right)+(\alpha-\beta)(x_i+x_j)\left(2-x_i^2-x_j^2\right)\right)}{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}i=j\rightarrow\\\left[\mathbf{W}''_{i,i}\right]=\int_{-1}^{1}dx\,\hat{f}_i(x)\frac{w''(x)}{w(x)}\hat{f}_i(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)}{(1+x_i)^2}+\frac{\beta(\beta-1)}{(1-x_i)^2}-\frac{2\alpha\beta}{1-x_i^2}+\frac{1}{1-x_i^2}\left(\frac{N(N+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}\left((\alpha+\beta+2)(1+x_i^2)-2(\alpha-\beta)x_i\right)+\frac{(\alpha+\beta-2)\left(1+x_ix_j\left(2-3x_i^2\right)+4(\alpha-\beta)x_i\left(1-x_i^2\right)\right)}{(1-x_i^2)^2}\right)\\i\neq j\rightarrow\\\left[\mathbf{W}''_{i,j}\right]=\int_{-1}^{1}dx\,\hat{f}_i(x)\frac{w''(x)}{w(x)}\hat{f}_j(x)=\frac{(-1)^{i-j}}{\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}}\left(\frac{N(N+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}\left((\alpha+\beta+2)(1+x_ix_j)-(\alpha-\beta)(x_i+x_j)\right)+\frac{(\alpha+\beta-2)\left(1+x_ix_j\left(2-x_i^2-x_j^2-x_ix_j\right)+(\alpha-\beta)(x_i+x_j)\left(2-x_i^2-x_j^2\right)\right)}{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}\right)\end{cases}$$

*Pour obtenir ce résultat il convient de calculer explicitement les sommes suivantes :*

$$\hat{f}_i'(x_j)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\sqrt{\frac{1-x_i^{\,2}}{1-x_j^2}}\times\frac{(-1)^{i-j}}{x_j-x_i}\qquad \hat{f}_i'(x_i)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{x_i}{1-x_i^{\,2}}$$

$$i=j\rightarrow\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l\left(\hat{f}_i'(x_l)\right)^2=\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\lambda_l\left(\hat{f}_i'(x_l)\right)^2+\lambda_i\left(\hat{f}_i'(x_i)\right)^2=\left(1-x_i^{\,2}\right)\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{1-x_l^2}\times\frac{1}{(x_l-x_i)^2}+\lambda_i\left(\hat{f}_i'(x_i)\right)^2$$

$$Or\quad\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{1-x_l^2}\times\frac{1}{(x_l-x_i)^2}=\frac{1}{2}\times\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(1-x_i)^2}\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{1-x_l}+\frac{1}{(1-x_i)^2}\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{x_l-x_i}-\frac{1}{(1-x_i)^3}+\frac{1}{1-x_i}\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{(x_l-x_i)^2}+\\+\frac{1}{(1+x_i)^2}\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{1+x_l}-\frac{1}{(1+x_i)^2}\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{x_l-x_i}-\frac{1}{(1+x_i)^3}+\frac{1}{1+x_i}\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{(x_l-x_i)^2}\end{array}\right\}$$

$$i\neq j\rightarrow\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l\hat{f}_i'(x_l)\hat{f}_j'(x_l)=\sum_{l=1,l\neq i,l\neq j}^{l=N}\lambda_l\hat{f}_i'(x_l)\hat{f}_j'(x_l)+\lambda_i\hat{f}_i'(x_i)\hat{f}_j'(x_i)+\lambda_j\hat{f}_i'(x_j)\hat{f}_j'(x_j)$$

$$=(-1)^{i-j}\sqrt{\left(1-x_i^{\,2}\right)\left(1-x_j^{\,2}\right)}\left(\sum_{l=1,l\neq i,l\neq j}^{l=N}\frac{1}{\left(1-x_l^2\right)(x_l-x_i)(x_l-x_j)}\right)+\frac{x_i}{1-x_i^{\,2}}\sqrt{\frac{1-x_j^{\,2}}{1-x_i^2}}\times\frac{(-1)^{i-j}}{x_i-x_j}+\sqrt{\frac{1-x_i^{\,2}}{1-x_j^2}}\times\frac{(-1)^{i-j}}{x_j-x_i}\frac{x_j}{1-x_j^{\,2}}$$

$$Or\quad\sum_{l=1,l\neq i,l\neq j}^{l=N}\frac{1}{\left(1-x_l^2\right)(x_l-x_i)(x_l-x_j)}=\frac{1}{2(x_i-x_j)}\times\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{x_i-x_j}\left(\frac{1}{1-x_i^{\,2}}+\frac{1}{1-x_j^{\,2}}\right)+\frac{1}{(1+x_i)^2}-\frac{1}{(1-x_i)^2}+\frac{1}{(1-x_j)^2}-\frac{1}{(1+x_j)^2}+\\+\frac{1}{1-x_i}\times\left(\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{1-x_l}+\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{x_l-x_i}\right)-\frac{1}{1+x_i}\times\left(\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{1+x_l}-\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{x_l-x_i}\right)-\\-\frac{1}{1-x_j}\times\left(\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{1-x_l}+\sum_{l=1,l\neq j}^{l=N}\frac{1}{x_l-x_j}\right)+\frac{1}{1+x_j}\times\left(\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{1+x_l}-\sum_{l=1,l\neq j}^{l=N}\frac{1}{x_l-x_j}\right)\end{array}\right\}$$

*Il convient donc de calculer les sommes « plus élémentaires » suivantes :*

$$\frac{P_N^{(\alpha,\beta)\prime}(x)}{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}=\frac{(N+\alpha+\beta+1)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)}{2\,P_N^{(\alpha,\beta)}(x)}=\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{x-x_l}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{1-x_l}=\frac{(N+\alpha+\beta+1)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(1)}{2\,P_N^{(\alpha,\beta)}(1)}=\frac{N(N+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)}\\\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{1+x_l}=(-1)^N\frac{(N+\alpha+\beta+1)P_{N-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(-1)}{2\,P_N^{(\alpha,\beta)}(-1)}=\frac{N(N+\alpha+\beta+1)}{2(\beta+1)}\end{array}\right.$$

$$i=j\rightarrow\sum_{l=1}^{l=N}\lambda_l\left(\hat{f}_i'(x_l)\right)^2=\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\lambda_l\left(\hat{f}_i'(x_l)\right)^2+\lambda_i\left(\hat{f}_i'(x_i)\right)^2=\left(1-x_i^{\,2}\right)\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{1-x_l^2}\times\frac{1}{(x_l-x_i)^2}+\lambda_i\left(\hat{f}_i'(x_i)\right)^2$$

$$\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{1-x_l^{\,2}}=\frac{1}{2}\times\left(\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{1-x_l}+\sum_{l=1}^{l=N}\frac{1}{1+x_l}\right)=\frac{N(N+\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}{4(\alpha+1)(\beta+1)}\qquad\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{x_l-x_i}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\alpha+1}{1-x_i}-\frac{\beta+1}{1+x_i}\right)$$

$$\sum_{l=1,l\neq i}^{l=N}\frac{1}{(x_l-x_i)^2}=\frac{1}{12\left(1-x_i^{\,2}\right)}\times\left(4(N-1)(N+\alpha+\beta+2)-(\alpha-\beta)^2-2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+6)x_i-\left(4N(N+\alpha+\beta+1)+(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+6)\right)x_i^{\,2}\right)$$

*Par ailleurs pour α=0 ou 1 ou β=0 ou 1, les termes suivants* $2\left[\frac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_{-1}^{1}$ *et* $\left[\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'\right]_{-1}^{1}$ *ne sont plus systématiquement nuls. Pour le coefficient noté* $c_{i,j}$ *,*

$$c_{i,j}=2\times\left[\frac{w'(x)}{w(x)}\times\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right]_{-1}^{1}-\left[\left(\hat{f}_i(x)\hat{f}_j(x)\right)'\right]_{-1}^{1}$$

*Selon les tableaux déjà établis nous avons :*

$$\alpha>1\quad\beta>1\rightarrow c_{i,j}=0$$

$$\alpha=1\quad\beta>1\rightarrow c_{i,j}=(-1)^{i-j+1}\frac{(N+1)(N+1+\beta)}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{(1-x_i)(1-x_j)}$$

$$\alpha>1\quad\beta=1\rightarrow c_{i,j}=(-1)^{i-j+1}\frac{(N+1)(N+1+\alpha)}{4}\frac{\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{(1+x_i)(1+x_j)}$$

$$\alpha=1\quad\beta=1\rightarrow c_{i,j}=-(-1)^{i-j}\frac{(N+1)(N+2)}{4}\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}\left(\frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}+\frac{1}{(1+x_i)(1+x_j)}\right)$$

$$\alpha=0\quad\beta>1\rightarrow c_{i,j}=(-1)^{i-j}\frac{\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1-x_i)(1-x_j)}\times\left(\beta-2N(N+\beta+1)+2\left(\frac{1}{1-x_i}+\frac{1}{1-x_j}\right)\right)$$

$$\alpha>1\quad\beta=0\rightarrow c_{i,j}=(-1)^{i-j}\frac{\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4(1+x_i)(1+x_j)}\times\left(\alpha-2N(N+\alpha+1)+2\left(\frac{1}{1+x_i}+\frac{1}{1+x_j}\right)\right)$$

$$\alpha=\beta=0\rightarrow c_{i,j}=(-1)^{i-j-1}\frac{\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{2}\times\left(\frac{1}{(1+x_i)(1+x_j)}\left(N(N+1)-\left(\frac{1}{1+x_i}+\frac{1}{1+x_j}\right)\right)+\frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}\times\left(N(N+1)-\left(\frac{1}{1-x_i}+\frac{1}{1-x_j}\right)\right)\right)$$

$$\alpha=0\quad\beta=1\rightarrow c_{i,j}=(-1)^{i-j}\frac{\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4}\times\left(\frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}\left(1-2N(N+2)+2\left(\frac{1}{1-x_i}+\frac{1}{1-x_j}\right)\right)-\frac{(N+1)^2}{(1+x_i)(1+x_j)}\right)$$

$$\alpha=1\quad\beta=0\rightarrow c_{i,j}=(-1)^{i-j+1}\frac{\sqrt{(1-x_i^{\,2})(1-x_j^{\,2})}}{4}\times\left(\frac{(N+1)^2}{(1-x_i)(1-x_j)}-\frac{1}{(1+x_i)(1+x_j)}\left(1-2N(N+2)+2\left(\frac{1}{1+x_i}+\frac{1}{1+x_j}\right)\right)\right)$$

*Avec ces valeurs on retrouve bien pour les cas trois cas α=β=0, α=0 et β=1, α=1 et β=0, une intégrale nulle, étant donné que l'intégrande est elle-même identiquement nulle.*

*Solution approchée de première espèce de l'équation des ondes sphéroïdales associées généralisée de Legendre et de quelques extensions*

*A partir de ces éléments matriciels, il suffit de composer à partir de l'équation différentielle donnée les éléments matriciels correspondants pour un problème de recherche de valeurs et vecteurs propres correspondant*

*à finir*